

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Renan Cunha de Oliveira

**MOVIMENTO HIPERBÓLICO DE SISTEMAS DE DOIS
NÍVEIS A TEMPERATURA FINITA**

Florianópolis

2016

Renan Cunha de Oliveira

**MOVIMENTO HIPERBÓLICO DE SISTEMAS DE DOIS
NÍVEIS A TEMPERATURA FINITA**

Tese submetida ao Programa de Pós-
Graduação em Física para a obtenção
do Grau de Doutor em Física.
Orientador: Prof. Dr. Jeferson de
Lima Tomazelli

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Oliveira, Renan Cunha de
Movimento hiperbólico de sistemas de dois níveis a
temperatura finita / Renan Cunha de Oliveira ; orientador,
Dr. Jeferson de Lima Tomazelli - Florianópolis, SC, 2016.
179 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.
Programa de Pós-Graduação Multidisciplinar em Saúde.

Inclui referências

1. Saúde. 2. Efeito Unruh. 3. Thermofield Dynamics. 4.
Equação Mestra. I. Tomazelli, Dr. Jeferson de Lima . II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós
Graduação Multidisciplinar em Saúde. III. Título.

Movimento hiperbólico de sistemas de dois níveis a temperatura finita


Renan Cunha de Oliveira


Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do título de **DOUTOR EM FÍSICA**, na área de concentração **Física Matemática e Teoria de Campos** e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Física.



Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
(UFSC - orientador)



Ivan Helmuth Bechtold
(UFSC - Coordenador do Programa)



Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
(UFSC - presidente)


Prof. Dr. Wagner Figueiredo
(membro titular) - UFSC/FSC


Prof. Dr. Jose Abdalla Helayël - Neto
(membro externo) - CBPF


Prof. Dr. Pawel Klimas
(membro titular) - UFSC/FSC


Prof. Dr. Gerson Gregório Gomes
(membro externo) - IFSC


Prof. Dr. Sidney dos Santos Avancini
(membro titular) - UFSC/FSC

Dedico esta tese a minha família pela paciência e apoio incondicional.

AGRADECIMENTOS

Aos meus queridos pais, a minha mãe Célia Mariza e a pai Carlos Roberto, que me trouxeram este mundo e me deram a sede pelo conhecimento em minha vida.

A minha irmã Raquel pela ajuda e sempre estar ao meu lado.

Ao professor Dr. Jeferson de Lima Tomazelli, pela inestimável orientação e amizade.

Aos amigos, familiares, professores e todos aqueles que de alguma forma estiveram e estão próximos a mim, pelo apoio e ajuda ao longo dos anos.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the seashore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

Sir Isaac Newton

RESUMO

Neste trabalho investigamos a resposta de um detector de Unruh-DeWitt representado por um sistema atômico de dois níveis em interação com um campo de radiação escalar, considerado como um reservoir, construindo a equação mestra que governa a evolução temporal desses dois subsistemas a temperatura finita. Com tal objetivo, estudamos inicialmente o comportamento de um oscilador acoplado a um campo escalar e da partícula browniana acelerada, a fim de discutir se esses sistemas atingem o equilíbrio térmico em um referencial acelerado, e construímos o operador entropia associado ao campo escalar livre, no contexto da Thermo Field Dynamics. Posteriormente, identificando as contribuições de flutuação do vácuo e reação de radiação, derivamos para uma classe de acoplamentos admissíveis, as taxas de variação de energia para o átomo e o campo, bem como das populações dos níveis atômicos, nos casos inercial e de aceleração própria constante, discutindo os papéis distintos das temperaturas do banho térmico de Minkowski e de Unruh.

Palavras-chave: Efeito Unruh. Flutuação do Vácuo. Reação de Radiação. Thermo Field Dynamics. Equação Mestra. Equação de Langevin Quântica

ABSTRACT

In this work, we investigate the Unruh-DeWitt detector response, modeled by an atomic two-level system interacting with a scalar radiation field, considered as a reservoir, by constructing a master equation, which governs the temporal evolution of both sub-systems at finite temperature. For this purpose, we initially study the behavior of an oscillator coupled to a scalar field and of an accelerated brownian particle, in order to discuss if these systems reach thermal equilibrium in an accelerated frame, and construct the entropy operator associated with a scalar field, in the context of Thermo Field Dynamics. In the sequence, identifying the vacuum fluctuation and radiation reaction contribution, we derive, for a class of admissible couplings, the variation rate of energy for the atom and the field, as well as of the atomic level populations, both in the inertial case and in that of constant proper acceleration, discussing the distinct roles of Minkowski and Unruh heat baths.

Keywords: Unruh Effect. Vacuum Fluctuation. Radiation Reaction. Thermo Field Dynamics. Master Equation. Quantum Langevin Equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Linhas de Mundo.	24
Figura 2	Coordenadas de Rindler.	28
Figura 3	Evolução de $\sigma_+(\tau)$ e $\sigma_-(\tau)$	101
Figura 4	Gráfico de $g(\tau', \tau'')$	103
Figura 5	Contorno de integração.	133
Figura 6	Polo único no exterior do contorno.	134
Figura 7	Polo único no interior do contorno.	135
Figura 8	Contorno com n -polos.	136
Figura 9	Contorno com n -polos.	137
Figura 10	Contorno de integração.	139

SUMÁRIO

1	Introdução	19
2	Coordenadas de Minkowski e Rindler	23
2.1	Universo de Rindler	23
2.2	Coordenadas de Rindler	26
2.3	O Campo Escalar no Espaço-Tempo de Minkowski	28
2.4	O Campo Escalar na Variedade de Rindler	31
3	O Efeito Unruh	37
3.1	Detector de DeWitt	37
3.1.1	Modelos de Detector	41
3.1.2	Detector do tipo Dipolo	43
4	Efeitos de Temperatura	45
4.1	Thermo Field Dynamics	45
4.1.1	Campo Escalar Livre	48
4.1.2	Conexão entre Operadores da Thermo Field Dynamics e Rindler	50
4.2	Entropia na Thermo Field Dynamics	53
4.2.1	Entropia do Campo Escalar Livre	54
5	Modelos de Ford-O'Connell e FKM	57
5.1	A Equação de Langevin	57
5.2	O Campo Escalar Real e um Oscilador Acelerado	58
5.2.1	Fluxo de Energia	61
5.3	O Modelo FKM	64
5.3.1	A Matriz de Interação	67
5.3.2	Osciladores Quânticos Acoplados	69
5.3.3	Osciladores Quânticos Acelerados	71
6	Evolução de um Sistema de Dois Níveis.	75

6.1	O Modelo de Audretsch-Müller	75
6.1.1	Referenciais Inercial e Acelerado	84
6.1.2	Acoplamento Derivativo	90
6.2	A Equação Mestra	92
6.2.1	A Equação Mestra para um Sistema de Dois Níveis	96
7	Considerações Finais	105
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A – A Transformação de Bogoliubov	115
	APÊNDICE B – Funções de Wightman e Pauli-Jordan	125
	APÊNDICE C – Cálculo de Integrais pelo Método dos Resíduos	133
	APÊNDICE D – Expansão do Vácuo de Rindler	145
	APÊNDICE E – Relações do Oscilador Acelerado	153
	APÊNDICE F – Equações de Movimento	163
	APÊNDICE G – Variação de Energia para o Campo	167
	APÊNDICE H – Condição de Validade para a Expansão Perturbativa	175

1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tentativas de quantizar a gravidade levaram a inúmeros avanços importantes. Um dos ramos de pesquisa que cresceram a partir desse programa foi a teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo. Há mais de quatro décadas Fulling (FULLING, 1973) já apresentava a iniciativa de quantizar teorias em espaços-tempos curvos, o resultado mais chamativo tendo sido a descoberta do efeito Hawking (HAWKING, 1975, 1974), em meados dos anos 70, para a radiação térmica de buracos negros. Hawking forneceu a base teórica que levou a um grande desenvolvimento da termodinâmica de buracos negros, originalmente concebida fenomenologicamente por Bekenstein (BEKENSTEIN, 1973). Posteriormente, Davis (DAVIES, 1975) sugeriu que um efeito análogo ocorreria mesmo em um espaço-tempo plano. Um fato histórico interessante é que os matemáticos estavam, aparentemente de forma independente, desenvolvendo uma teoria axiomática geral dos campos quânticos que encontrou sua aplicação natural nos chamados *wedge-shaped manifolds* (BISOGNANO; WICHMANN, 1975; BISOGNANO et al., 1976).

Em 1976, Unruh (UNRUH, 1976) mostrou que as características essenciais do efeito Hawking estavam contidas em uma situação mais simples: um detector acelerado, ainda que no espaço-tempo plano, irá detectar partículas no vácuo, propriedade conhecida como efeito Unruh. A relação matemática entre as coordenadas de Minkowski e Rindler é praticamente idêntica à que existe entre as coordenadas de Schwarzschild e Kruskal e, portanto, muitos dos elementos da teoria de Unruh têm contrapartida na teoria de buracos negros. Em seu artigo de 1976 e outro posterior, com Wald (UNRUH; WALD, 1984), Unruh alega que as partículas de Rindler poderiam ser detectadas. Estes resultados foram amplamente aceitos na época. No entanto, Grove (GROVE, 1986) levanta objeções às conclusões de Unruh, argumentando que se tratavam de uma interpretação incorreta dos resultados. Desde então, a descoberta do efeito Hawking-Unruh inspirou muitos pesquisadores ao longo dos anos, gerando um debate sobre a genuinidade física do efeito Unruh.

O presente trabalho tem como objetivo investigar o efeito da aceleração em sistemas físicos descritos pelas equações de evolução de Langevin, Heisenberg e Liouville-von Neumann; tal proposta, nos leva inevitavelmente ao estudo do efeito Unruh. Para isso, utilizaremos dois procedimentos: introduzir a aceleração através de uma parametrização

do tipo hiperbólico, no espaço-tempo de Minkowski e através de operadores do campo quantizado não massivo na variedade de Rindler em $(1 + 1)$. Deste modo, vamos investigar os seguintes tópicos:

1. A partir da proposta original do detector Unruh-DeWitt, é importante examinar outros acoplamentos possíveis entre detector e campo, para observar se tais efeitos se manifestam nessas outras situações.
2. Uma vez que os princípios da termodinâmica devem ser sempre respeitados, verificamos como a entropia de von Neumann se comporta no caso acelerado, apresentando também o conceito de *quase-temperatura* proposto por Misra (ZHENG; JIANYANG; MISRA, 1996).
3. Aceitando o fato que o sistema termaliza na temperatura Unruh, será analisada a questão levantada por Ford e O'Connell (FORD; O'CONNELL, 2006) sobre um sistema irradiar ou não, ao ser acelerado.
4. Estudaremos o modelo de Ford, Kac e Mazur (FORD; KAC; MAZUR, 1965), onde um sistema de osciladores harmônicos acoplados pode ser visto como banho térmico.
5. Observaremos no modelo de Audretsch e Müller (AUDRETSCH; MÜLLER, 1994), como a flutuação do vácuo e a reação de radiação se comportam ao acelerarmos o sistema, além de analisarmos acoplamentos derivativos, considerando os observáveis físicos associados ao campo escalar e não apenas aqueles para o sistema atômico, discutindo o papel do ordenamento de operadores.
6. A partir da equação que governa a evolução de um sistema de dois níveis, identificaremos as taxas de excitação para um detector acelerado e, a posteriori, os coeficientes de Einstein na situação de equilíbrio com um campo escalar considerado como um *reservoir*. Apresentaremos uma equação mestra térmica para um sistema atômico de dois níveis, observando a taxa com que o sistema atômico e o *reservoir* trocam energia, através das funções de *Green* térmicas da *Thermo Field Dynamics* (TFD); subsequentemente, estudaremos seu comportamento para sistemas inerciais e acelerados, discutindo os papéis distintos da temperatura de equilíbrio e da aceleração própria.

Assim sendo, este trabalho está estruturado da seguinte maneira: no Capítulo 2, reveremos brevemente o sistema de coordenadas de Minkowski e o conceito de aceleração própria. Introduziremos o sistema de coordenadas de Rindler e o campo de Rindler em $(1 + 1)$ dimensões para o caso não massivo, utilizando os resultados da teoria de campos no espaço-tempo de Minkowski. No Capítulo 3, apresentaremos um *toy model* para detectores de partículas, investigado sua resposta em duas situações, a saber, em um referencial inercial e noutro acelerado. Na sequência, no Capítulo 4, procederemos à construção dos estados térmicos da TFD na representação de número e apresentaremos como utilizar a TFD para termalizar uma teoria via valores esperados no vácuo. Analisaremos as possíveis conexões entre os operadores de Rindler e os da TFD, aplicando os resultados à entropia de von Neumann. Em seguida, no Capítulo 5, verificaremos se um oscilador acelerado interagindo com o campo escalar irradia ou não. Mostraremos que um sistema de osciladores harmônicos acoplados pode ser visto como um modelo de banho térmico, quantizando o sistema em um referencial acelerado. Posteriormente, no Capítulo 6, consideraremos um sistema atômico de dois níveis em interação com um campo escalar sem massa, discutindo a taxa de variação de energia, identificando e analisando quantitativamente as distintas contribuições de flutuação do vácuo e reação de radiação. A continuação, deduziremos a equação mestra a partir da equação de von Neumann, na aproximação de *coarse-graining*, e a aplicamos a um sistema de dois níveis. Para finalizar, no Capítulo 7, apresentaremos algumas considerações finais, apontando para perspectivas de continuação deste trabalho.

Neste trabalho serão utilizadas as unidades naturais $c = \hbar = 1$, exceto quando indicado o contrário.

2 COORDENADAS DE MINKOWSKI E RINDLER

O objetivo deste capítulo é mostrar que um observador acelerado não "enxergará" o vácuo no espaço-tempo de Minkowski vazio, mas contendo um número de partículas que é proporcional à aceleração. Para este fim, apresentamos na seção 2.1 o sistema de coordenadas de Minkowski em sua forma mais simples e a partir do conceito de tempo próprio chegamos ao movimento hiperbólico. Na seção 2.2, tendo como motivação a seção anterior, introduzimos um sistema de coordenadas hiperbólico, as coordenadas de Rindler. Na seção 2.3 apresentamos o campo escalar massivo para $(1 + 3)$ dimensões nas coordenadas de Minkowski e na seção 2.4 retornaremos à discussão anterior, considerando o caso não massivo em $(1 + 1)$ dimensões e mostrando como as bases se relacionam.

2.1 UNIVERSO DE RINDLER

Embora este modelo de universo seja plano, ele exibe algumas das características essenciais de um buraco negro. Ele é baseado na invariância sob um *boost* de um espaço-tempo plano, e pode ser facilmente construído, partindo de um universo plano determinado em termos de coordenadas (t, \mathbf{x}) e com elemento de linha, ds^2 , dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.2)$$

e, portanto,

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2. \quad (2.3)$$

Determinadas as posições iniciais de uma família de linhas de mundo na superfície, $t = 0$, através da origem O (vide figura (1)), usaremos *boosts* para determinar as linhas de mundo do resto do universo, através das relações ¹

¹Por simplicidade, restringiremos sem perda de generalidade, nossa discussão para o caso $(1+1)$ dimensional.

$$x = \gamma (x' + vt'), \quad (2.4)$$

$$t = \gamma (t' + vx'), \quad (2.5)$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ e $|v| < 1$.

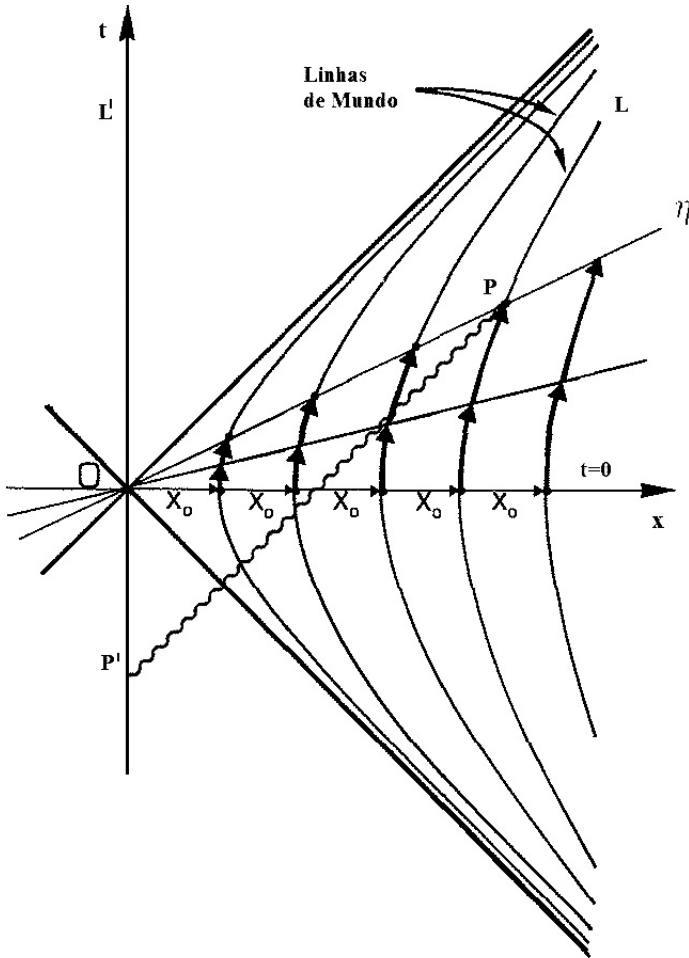


Figura 1: Linhas de Mundo.

Como o intervalo ds^2 é invariante, as linhas de mundo são construídas de tal maneira que a distância X_0 entre elas permanece constante para uma mesma superfície de instantaneidade η . Embora, à primeira vista isto não pareça ser o caso, observamos que as superfícies de instantaneidade são as linhas retas através da origem, sobre as quais todos os pontos possuem o mesmo ângulo em relação à horizontal; conforme evoluímos no tempo próprio, valores cada vez maiores de v , o ângulo da superfície de instantaneidade associada a uma linha de mundo aumenta assintoticamente em direção ao cone de luz. Assim, a velocidade v serve como um parâmetro ao longo de uma linha de mundo L , de modo que, para cada valor de v a distância entre a origem O e um ponto P de L assume valores na hipérbole

$$x^2 - t^2 = \rho^2, \quad (2.6)$$

onde ρ é uma constante; a equação (2.6) é a equação fundamental para as linhas de mundo. Dado que as linhas de mundo não são linhas retas, cada observador está se movendo de forma não inercial. Assim, devido à construção das linhas de mundo através de transformações de Lorentz que incrementam uniformemente a velocidade para cada linha de mundo, cada observador irá medir a sua taxa de variação da velocidade em relação ao seu tempo próprio como sendo constante, ou seja, ele possui aceleração constante que chamaremos de aceleração própria, α .

Embora estas afirmações sejam óbvias quando se aprecia o papel das transformações Lorentz como um mapa do espaço-tempo, um pouco de reflexão irá mostrar que um observador em uma linha de mundo L só pode receber sinais desde o observador em P' , no cone de luz do passado de O ; em $x = 0$, quando $t - x < 0$. Por outro lado, todos os eventos para os quais $t - x > 0$, não podem enviar sinais para L ; a superfície $t = x$ é chamada de horizonte de eventos e, portanto, todos os eventos para os quais $t > x$ estão para sempre "escondidos" do observador em L . Este comportamento é idêntico quando observamos uma partícula atravessar o horizonte de eventos de um buraco negro.

Finalmente, é interessante ver como a forma métrica (2.3) é transformada ao se mudar para coordenadas adaptadas às novas linhas de mundo. Para isto, definimos o tempo próprio τ entre dois eventos como sendo o intervalo de tempo medido por um relógio que passa por ambos os eventos, expresso matematicamente por

$$\tau \equiv \int \frac{dt}{\gamma} = \int dt (1 - v^2)^{\frac{1}{2}}; \quad (2.7)$$

substituindo v pela expressão

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t}{(1 + \alpha^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.8)$$

onde $\alpha = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$ é a aceleração própria de um observador na linha de mundo L , encontramos

$$\tau = \int dt (1 + \alpha^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{-1} \operatorname{arcsinh}(\alpha t), \quad (2.9)$$

ou

$$t = \alpha^{-1} \sinh(\alpha \tau). \quad (2.10)$$

De (2.10) e (2.6), com $\rho^2 \equiv \frac{1}{\alpha^2}$, encontra-se

$$x = \alpha^{-1} \cosh(\alpha \tau). \quad (2.11)$$

As equações (2.10) e (2.11) são as transformações passivas entre referencias S e S' no espaço de Minkowski. Logo, um movimento retilíneo acelerado com aceleração própria α é uma hipérbole no quadrante $\mathbf{x} > |t|$. Note que, se $\alpha = \infty$, a equação (2.6) implica $x = \pm t$, de modo que a aceleração própria de partículas se movendo com velocidade c , tal como o fóton, é infinita.

2.2 COORDENADAS DE RINDLER

Na seção 2.1 foi visto que um referencial "acelerado" se move ao longo de uma hipérbole, de modo que, para descrever os fenômenos físicos segundo este observador é necessário adotar um sistema de coordenadas apropriado. Assim, definimos o sistema de coordenadas de Rindler (η, ξ) , relacionadas às coordenadas de Minkowski (t, x) pelas transformações

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad (2.12)$$

$$x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta). \quad (2.13)$$

Comparando com (2.10) ou (2.11), nota-se que

$$\eta(\tau) = \frac{\alpha}{a} \tau, \quad (2.14)$$

$$\xi = a^{-1} \ln \left(\frac{a}{\alpha} \right), \quad (2.15)$$

para $-\infty < \eta, \xi < \infty$. A coordenada η é proporcional ao tempo próprio τ e, particularmente, se $a = \alpha$ temos $\eta = \tau$ e $\xi = 0$, recuperando as equações (2.10) e (2.11). As coordenadas de Rindler (2.12) e (2.13) cobrem apenas a região $x > |t|$ do espaço-tempo de Minkowski, região que chamaremos *wedge R*; conforme (2.3), o elemento de linha resultante para as coordenadas de Rindler é²

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2). \quad (2.16)$$

As coordenadas de Rindler podem ser estendidas para cobrir também a região $x < -|t|$, o *wedge L*, invertendo os sinais de t e x em (2.12) e (2.13),

$$t = -a^{-1} e^{a\xi} \sinh(a\eta), \quad (2.17)$$

$$x = -a^{-1} e^{a\xi} \cosh(a\eta). \quad (2.18)$$

Rigorosamente, não se pode usar (η, ξ) , para cobrir ambas as regiões simultaneamente, de onde se conclui que, para cada coordenada (η, ξ) , estão associadas duas em (t, x) . Porém, nos permitiremos este abuso de linguagem sempre que especificarmos explicitamente a qual região, *R* ou *L*, nos referimos. A característica mais importante é, neste ponto, que um observador de Rindler em *R* está causalmente separado de *L* pelo horizonte de eventos. É interessante analisar alguns casos particulares e as informações que estes nos fornecem sobre as coordenadas de Rindler; no caso de acelerações muito pequenas, ou seja, no limite $\alpha \rightarrow 0$, como $\alpha = ae^{-a\xi}$, resulta $\xi \rightarrow \infty$, indicando que se retorna assintoticamente ao espaço-tempo de Minkowski; no outro extremo, quando temos acelerações muito altas, $\alpha \rightarrow \infty$, como vimos na seção anterior, isto equivale a $x = \pm t$. Tal fato tem implicações profundas; como visto, as coordenadas de Rindler não conseguem recobrir todo o espaço-tempo de Minkowski, separando-o em quatro regiões desconexas dentre as quais situam-se os *wedge R* e *L*. Concluimos então que não pode ocorrer qualquer troca de informação causal entre os *wedge R* e *L*. Em carácter informativo, as outras duas regiões não mencionadas são os *wedge Past (P)* e *Future (F)* os quais podem ser recobertos pela variedade de Milne(ELLIS; WILLIAMS, 2000), cujo universo possui elemento de linha

²Lembrando que estamos no caso bidimensional.

$$ds^2 = dt^2 - a^2 t^2 dx^2 \quad (2.19)$$

e possui propriedades análogas ao modelo de Friedmann-Robertson-Walker sem curvatura (ELLIS; WILLIAMS, 2000).

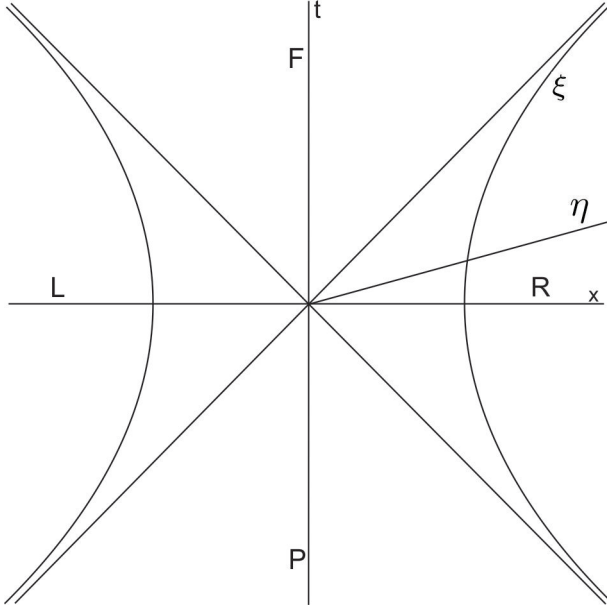


Figura 2: Coordenadas de Rindler.

2.3 O CAMPO ESCALAR NO ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Para preparar o estudo posterior do efeito Unruh, revisemos sucintamente o caso do campo escalar livre ϕ com massa m . A densidade lagrangiana em um sistema de coordenadas arbitrário é dada por

$$\mathcal{L}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} |g|^{\frac{1}{2}} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2], \quad (2.20)$$

onde

$$g = \det(g^{\mu\nu}). \quad (2.21)$$

A equação de movimento proveniente da extremização da ação

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(t, \mathbf{x}) \quad (2.22)$$

é a equação de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad (2.23)$$

onde

$$\square = |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu g^{\mu\nu} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_\nu, \quad (2.24)$$

denota o operador d'alembertiano. Nas coordenadas de Minkowski a equação de Klein-Gordon reduz-se à forma conhecida

$$(\partial_t^2 - \partial_{\mathbf{x}}^2 + m^2) \phi = 0. \quad (2.25)$$

As soluções da equação (2.25) são do tipo de onda plana, onde os modos de frequência, $u_{\mathbf{k}}$, são dados por

$$u_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (2.26)$$

com $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Os modos $u_{\mathbf{k}}$ são ditos de frequência positiva, pois satisfazem

$$\partial_t u_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}, \quad (2.27)$$

enquanto os modos $u_{\mathbf{k}}^*$ são ditos de frequência negativa e satisfazem

$$\partial_t u_{\mathbf{k}}^* = i\omega_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^*. \quad (2.28)$$

O conjunto de soluções $\{u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}}^*\}$ forma uma base completa e, assim, podemos expandir nesta base qualquer solução da equação de Klein-Gordon

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_{\mathbf{k}}^* \right]. \quad (2.29)$$

A equação (2.29) pode ser convertida do discreto para o contínuo integrando no espaço recíproco,

$$V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (2\pi)^{-3} \int d^3 \mathbf{k}. \quad (2.30)$$

Se impusermos condições de contorno periódicas a $u_{\mathbf{k}}$, ou seja, $k_i = \frac{2\pi}{L}n$, $n \in \mathbb{N}$ e $i = 1, 2, 3$, obteremos

$$\phi(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (2.31)$$

Finalmente, se impusermos ao campo $\phi(t, \mathbf{x})$ e ao seu conjugado $\pi(t, \mathbf{x}) = \partial_t \phi(t, \mathbf{x})$ as relações de comutação canônicas a tempos iguais

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\pi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= 0, \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x}')] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (2.32)$$

encontraremos que os operadores $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}}$ devem satisfazer a álgebra

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (2.33)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0 = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger]. \quad (2.34)$$

Nas equações acima, $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ e $a_{\mathbf{k}}$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação de partículas, os quais atuam no espaço de Fock simétrico, construído como soma direta de espaços de Hilbert de n partículas

$$F^+(\mathcal{H}) = S^+[\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \dots] = S^+ \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n, \quad (2.35)$$

onde S^+ é o operador responsável por simetrizar os estados do sistema. A base normalizada de vetores *ket*, denotados $|\rangle$, pode ser construída a partir do vetor $|0\rangle \in \mathcal{H}_0$, chamado vácuo, por sucessivas atuações dos operadores $a_{\mathbf{k}}^\dagger$; por outro lado, o estado $|0\rangle$ tem a propriedade de ser aniquilado por todos os operadores $a_{\mathbf{k}}$,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}}|0\rangle &= 0, \\ a_{\mathbf{k}}^\dagger|0\rangle &= 1_{\mathbf{k}}, \quad \forall \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Reparemos que a equação para os modos de frequência (2.26) está devidamente normalizada. Para isto foi definido o produto interno de Klein-Gordon

$$\langle \psi, \phi \rangle = i \int d^{n-1}\Sigma \left[\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \phi \right], \quad (2.37)$$

onde $d^{n-1}\Sigma$ é o elemento de volume de dimensão $n-1$. Particularmente para Minkowski, resulta $d^{n-1}\Sigma = d^3\mathbf{x}$. Da definição do produto interno concluímos que³

$$\begin{aligned}\langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'} \rangle &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle u_{\mathbf{k}}^*, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= -\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle u_{\mathbf{k}}, u_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Consideremos novamente o campo escalar (2.31). O hamiltoniano do campo é encontrado partindo de (2.20), efetuando-se uma transformação de Legendre,

$$\begin{aligned}H_F(t) &= \int d^3\mathbf{x} [\pi^2(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L}(t, \mathbf{x})] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left\{ [\partial_t \phi(t, \mathbf{x})]^2 + [\nabla \phi(t, \mathbf{x})]^2 + m^2 \phi^2 \right\},\end{aligned}\tag{2.39}$$

ou, reescrevendo em função dos operadores de criação a_k^\dagger e de aniquilação a_k ,

$$H_F = \int d^3\mathbf{k} \omega_k a_k^\dagger a_k,\tag{2.40}$$

onde foi eliminada a energia de ponto zero via ordenamento normal.

2.4 O CAMPO ESCALAR NA VARIEDADE DE RINDLER

O caso bidimensional do campo escalar, sem massa, dá origem à invariância conforme dos modos normais da equação de campo, que têm precisamente a mesma forma em ambos os sistemas de coordenadas, de Minkowski e Rindler. Apesar de ser um caso bastante restrito, este simula todas as características que fundamentam a compreensão dos efeitos Unruh e Hawking.

Assim, antes de estudarmos o campo escalar em coordenadas de Rindler, introduziremos de maneira breve o que é uma transformação conforme e como isto pode nos auxiliar. Uma transformação conforme é o equivalente a uma transformação local de escala, implementada mul-

³Se, ao invés de em todo o espaço, os modos tivessem sido normalizados na caixa, obteríamos as mesmas relações, porém substituindo os deltas de Dirac por deltas de Kronecker.

tiplicando a métrica por uma função não nula das coordenadas espaço-temporais

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(t, \mathbf{x}) g_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

ou, equivalentemente,

$$ds^2 \rightarrow d\bar{s}^2 = \Omega^2(t, \mathbf{x}) ds^2. \quad (2.42)$$

Efetutando-se uma transformação conforme sobre a densidade lagrangiana (2.20) no caso não massivo, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow \bar{\mathcal{L}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \\ &= \frac{1}{2} |\Omega^4 g|^{\frac{1}{2}} (\Omega^{-2} g^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \mathcal{L}(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

ou seja, a densidade lagrangiana para o caso não massivo é invariante sob transformações conformes. Comparando os elementos de linha de Minkowski e Rindler (2.16), fica claro que, para o caso bidimensional⁴ $(1+1)$, estamos frente a uma transformação conforme, onde $\Omega^2(\xi) = e^{2a\xi}$. Conclui-se então que as equações de movimento serão as mesmas que para o caso da métrica de Minkowski,

$$\square \phi = (\partial_\eta^2 - \partial_\xi^2) \phi = 0. \quad (2.44)$$

De maneira totalmente análoga, assumimos que a equação (2.44) possui soluções do tipo onda plana, com modos de frequência, $\bar{u}_{\mathbf{k}}$, dados por

$$\bar{u}_{\mathbf{k}}(\eta, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{\mathbf{k}}}} e^{i\mathbf{k}\xi \mp i\omega_{\mathbf{k}}\eta}, \quad (2.45)$$

onde $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$; na exponencial, o sinal $-$ ao *wedge* R e $+$ se aplica ao *wedge* L , devendo-se ao fato de que uma onda progressiva para a direita em R se move no sentido de aumentar os valores de ξ , enquanto que em L se move no sentido de valores decrescentes. Assim como na variedade de Minkowski, os modos $\bar{u}_{\mathbf{k}}$ de frequência positiva devem satisfazer

$$\partial_\eta \bar{u}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}, \quad (2.46)$$

⁴Note que, para o caso de dimensão $(1+3)$, o elemento de linha para Rindler, $ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2) + dy^2 + dz^2$, não possui invariância conforme.

enquanto os modos de frequência negativa satisfazem

$$\partial_\eta \bar{u}_{\mathbf{k}}^* = i\omega_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}}^*, \quad (2.47)$$

de modo que, aplicando em (2.45), resulta que os modos $\bar{u}_{\mathbf{k}}$ de frequência positivas no *wedge* R correspondem aos modos de frequência negativa no *wedge* L . O conjunto de soluções $\{\bar{u}_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}}^*\}$ também forma uma base completa, satisfazendo as relações

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}'} \rangle &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \bar{u}_{\mathbf{k}}^*, \bar{u}_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\ \langle \bar{u}_{\mathbf{k}}, \bar{u}_{\mathbf{k}'}^* \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.48)$$

permitindo-nos expandir o campo

$$\phi(\eta, \xi) = \sum_{\mathbf{k}} \left(\bar{a}_{\mathbf{k}} \bar{u}_{\mathbf{k}} + \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \bar{u}_{\mathbf{k}}^* \right). \quad (2.49)$$

Embora as equações (2.29) e (2.49) para os campos sejam similares, temos duas bases distintas e com isso é esperado que os operadores $\bar{a}_{\mathbf{k}}$ e $\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ sejam diferentes de $a_{\mathbf{k}}$ e $a_{\mathbf{k}}^\dagger$. No entanto, pode-se verificar que respeitam as mesmas relações de comutação

$$[\bar{a}_{\mathbf{k}}, \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.50)$$

$$[\bar{a}_{\mathbf{k}}, \bar{a}_{\mathbf{k}'}] = 0 = [\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \bar{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger]. \quad (2.51)$$

Para bases diferentes temos espaços de Hilbert diferentes e, consequentemente, espaços de Fock distintos, com vácuos diferentes. Denotamos o vácuo de Rindler como sendo o estado $|0\rangle_R$, no qual atuam os operadores $\bar{a}_{\mathbf{k}}$ e $\bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ de acordo com

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle_R &= 0, \\ \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle_R &= 1_{\mathbf{k}}, \quad \forall \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

A discussão do cruzamento de *wedge's* está no âmago da quantização de campos em espaços-tempos curvos. Como comenta Fulling (FULLING, 1973), a teoria livre no espaço-tempo de Minkowski é bem compreendida, a representação fisicamente relevante da álgebra é a representação de Fock dos operadores $a_{\mathbf{k}}$ de (2.31). Se qualquer outra teoria proposta discorda desta, tanto pior para essa teoria; assim, a

primeira reação à teoria de campos livres na variedade de Rindler seria rejeitá-la. Mais especificamente, pode-se objetar que o sistema de coordenadas de Rindler recobre apenas uma parte do espaço-tempo, e que possui uma singularidade em $x = 0$ não ligada à estrutura intrínseca do espaço. Tem sido aceito que um campo não deve ser quantizado em uma variedade a menos que seja em "todo o espaço" no sentido, por exemplo, de completeza geodésica ou de máxima extensão analítica. Notamos que, por causa da mudança de sinal no expoente (2.45), conforme se cruza a fronteira entre os *wedges* R e L , a função⁵ $\bar{u}_{\mathbf{k}}^R$ não passa suavemente para $\bar{u}_{\mathbf{k}}^L$. Isto significa que os modos $\bar{u}_{\mathbf{k}}^R$ não são analíticos no *wedge* L . Em contraste, os modos $u_{\mathbf{k}}$ (2.26) no espaço-tempo de Minkowski são analíticos em todo o espaço. Esta analiticidade permanece verdadeira para qualquer combinação linear dos modos de frequência positiva. Em contrapartida, os modos de Rindler $\bar{u}_{\mathbf{k}}$ não podem ser unicamente uma combinação linear dos modos de frequência positiva, mas devem conter também modos de frequência negativa. De forma engenhosa, Unruh (UNRUH, 1976) nota que, apesar de $\bar{u}_{\mathbf{k}}^R$ e $\bar{u}_{\mathbf{k}}^L$ não serem analíticos, as duas combinações

$$\bar{u}_{\mathbf{k}}^R + e^{-\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{a}} \bar{u}_{-\mathbf{k}}^L \quad (2.53)$$

e

$$\bar{u}_{-\mathbf{k}}^R + e^{\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{a}} \bar{u}_{\mathbf{k}}^L \quad (2.54)$$

são, de fato, analíticas em todo o espaço.

Devido aos modos (2.53) e (2.54) compartilharem a analiticidade com os modos $u_{\mathbf{k}}$ de frequências positivas de Minkowski, eles devem também compartilhar um estado de vácuo comum $|0\rangle$. Assim, em vez de (2.49), expandimos o campo em termos de (2.53) e (2.54)

$$\begin{aligned} \phi(\eta, \xi) = \sum_{\mathbf{k}} [2\sinh\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}\pi}{a}\right)]^{-\frac{1}{2}} & \left[b_{\mathbf{k}}^R \left(\bar{u}_{\mathbf{k}}^R + e^{-\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{a}} \bar{u}_{-\mathbf{k}}^L \right) \right. \\ & \left. + b_{\mathbf{k}}^L \left(\bar{u}_{-\mathbf{k}}^R + e^{\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{a}} \bar{u}_{\mathbf{k}}^L \right) \right] + h.c., \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde foi introduzido um fator de normalização consistente com (2.37) e os novos operadores $b_{\mathbf{k}}^R \equiv b_{\mathbf{k}}^R \otimes \mathbb{I}$ e $b_{\mathbf{k}}^L \equiv \mathbb{I} \otimes b_{\mathbf{k}}^L$ respeitando

⁵Define-se a notação $\bar{u}_{\mathbf{k}}^R$ para indicar a função $\bar{u}_{\mathbf{k}}$ correspondente ao *wedge* R , e $\bar{u}_{\mathbf{k}}^L$ ao *wedge* L .

$$b_{\mathbf{k}}^R |0\rangle^R \otimes |0\rangle^L = 0 = |0\rangle^R \otimes b_{\mathbf{k}}^L |0\rangle^L. \quad (2.56)$$

A relação entre $\bar{a}_{\mathbf{k}}^R$ e $b_{\mathbf{k}}^R$, $b_{\mathbf{k}}^L$ pode ser encontrada através do produto interno (2.37) entre o campo $\phi(\eta, \xi)$ e as funções de base $\bar{u}_{\mathbf{k}}^R$ e $\bar{u}_{\mathbf{k}}^L$, resultando

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^R = \left[2 \sinh \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} \pi}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{\mathbf{k}}^R + e^{-\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} \right], \quad (2.57)$$

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^L = \left[2 \sinh \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} \pi}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{\mathbf{k}}^L + e^{-\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{-\mathbf{k}}^{R\dagger} \right]. \quad (2.58)$$

De posse das relações (2.57) e (2.58) entre os operadores e definido o operador número⁶ $\bar{N}_{\mathbf{k}}^R = \bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} \bar{a}_{\mathbf{k}}^R$, efetuamos a contagem no vácuo do *wedge* R

$$\langle 0 | \bar{N}_{\mathbf{k}}^R | 0 \rangle_R = 0, \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \bar{N}_{\mathbf{k}}^R | 0 \rangle \\ &= \left[2 \sinh \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} \pi}{a} \right) \right]^{-1} \langle 0 | \left(e^{\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} + e^{-\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{-\mathbf{k}}^R \right) \left(e^{\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{\mathbf{k}}^R + e^{-\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{2a}} b_{-\mathbf{k}}^{R\dagger} \right) | 0 \rangle \\ &= \left[2 \sinh \left(\frac{\omega_{\mathbf{k}} \pi}{a} \right) \right]^{-1} e^{-\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a}} \langle 0 | b_{-\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^{R\dagger} | 0 \rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a} \omega_{\mathbf{k}} - 1}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

A equação (2.59) indica que, contado o número de partículas com o operador número, no vácuo correto não se encontra nenhuma partícula. Por outro lado, a equação (2.60) mostra que ao se contar o número de partículas no vácuo de Minkowski encontramos $\left[e^{\frac{2\pi}{a} \omega_{\mathbf{k}}} - 1 \right]^{-1}$ partículas, ou seja, para detectores na variedade de Rindler o estado de mínima energia na variedade de Minkowski não está vazio.

⁶O operador número $N_{\mathbf{k}}$ aplicado em um estado arbitrário realiza uma contagem de quantas partículas de energia \mathbf{k} existem neste estado.

3 O EFEITO UNRUH

Na seção 3.1 será apresentando o modelo de um detector de partículas proposto por DeWitt (DEWITT, 1979) e, via teoria de perturbação, será encontrada, em ordem mais baixa, uma equação para a probabilidade de excitação do detector. Em particular, em (3.1.1) procuramos estudar como o detector se comporta em duas situações distintas: em um referencial inercial e quando é uniformemente acelerado.

3.1 DETECTOR DE DEWITT

No modelo proposto por DeWitt considera-se um detector, como sendo um objeto pontual que está linearmente acoplado com um campo escalar de massa nula através de uma interação do tipo monopolo

$$H_I(\tau) = \mu M(\tau) \phi(t(\tau), \mathbf{x}(\tau)), \quad (3.1)$$

onde μ é uma constante de acoplamento e $M(\tau)$ é o momento do detector. Especificamente, seja H_D o Hamiltoniano do detector que possui um espectro discreto $\{E_i\}$ e autoestados $|E_i\rangle$ tal que

$$H_D |E_i\rangle = E_i |E_i\rangle. \quad (3.2)$$

Supomos que o detector se move ao longo da linha de mundo descrita pela parametrização $x(\tau)$, onde τ é o tempo próprio do detector. Assumimos que em um instante inicial τ_0 o detector se encontra no estado $|E_0\rangle$ e o campo no vácuo $|0\rangle$. Para uma trajetória arbitrária, é razoável assumir que o detector não irá permanecer no estado inicial, mas sofrer uma transição para um estado excitado, de modo que, para um tempo posterior $\tau > \tau_0$, o detector se encontre no estado $|E_i\rangle$ e o campo em $|\Psi\rangle$. Para μ suficientemente pequeno a amplitude de transição pode ser calculada via teoria de perturbação

$$\langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle = \langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle_0 + \langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle_1 + \dots \quad (3.3)$$

Considerando somente termos até primeira ordem na série de Dyson, resulta¹

¹Para simplificar a notação, a partir deste ponto, se escreverá o campo como $\phi(\tau) \equiv \phi(t(\tau), \mathbf{x}(\tau))$.

$$\begin{aligned}
\langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle &= \langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle_1 = \left\langle E_i, \Psi \left| -i \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' H_I(\tau') \right| 0, E_0 \right\rangle \\
&= -i\mu \left\langle E_i, \Psi \left| \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' M(\tau) \phi(\tau') \right| 0, E_0 \right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

onde o termo $\langle E, \Psi | 0, E_0 \rangle_0$ é nulo devido à ortogonalidade dos autoestados. Utilizando a equação

$$M(\tau) = e^{iH_D\tau} M(0) e^{-iH_D\tau}, \tag{3.5}$$

para a evolução temporal de $M(\tau)$, obtém-se para (3.4)

$$\langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle = -i\mu \langle E_i | M(0) | E_0 \rangle \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' e^{i\tau'\Delta E} \langle \Psi | \phi(\tau') | 0 \rangle, \tag{3.6}$$

onde $\Delta E = E_i - E_0$. Porém, em lugar da amplitude é de interesse encontrar a probabilidade de transição, obtida tomando-se o quadrado do módulo da amplitude $|\langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle|^2$. No entanto, não se deseja observar o comportamento em relação a um determinado estado final $|\Psi, E_i\rangle$. Para tanto, é realizado o somatório sobre todos os estados possíveis de E_i e Ψ . Assim, define-se a probabilidade total de transição como

$$P_T \equiv \sum_{i, \Psi} |\langle E_i, \Psi | 0, E_0 \rangle|^2. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.6) resulta para a probabilidade total

$$\begin{aligned}
P_T &= \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \times \\
&\quad \sum_{\Psi} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{-i(\tau' - \tau'')\Delta E} \langle \Psi | \phi(\tau') | 0 \rangle^* \langle \Psi | \phi(\tau'') | 0 \rangle \\
&= \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau'' e^{-i(\tau' - \tau'')\Delta E} \langle 0 | \phi(\tau') \phi(\tau'') | 0 \rangle,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

onde foi utilizada a relação de completeza $\sum_{\Psi} |\Psi\rangle \langle \Psi| = 1$. A equação (3.8) determina a probabilidade de encontrar o detector no tempo τ em

um estado cuja energia é diferente de E_0 . Observamos que a probabilidade total pode envolver duas funções independentes. Uma correspondente ao detector, sendo independente da trajetória, mas apenas da estrutura interna deste. A outra deve-se ao campo, sendo determinada pela função de Wightman para frequências positivas, dita a resposta que o detector experimenta em sua trajetória. A equação (3.8) pode ser escrita de forma mais conveniente dividindo o domínio de integração $\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau''$ em regiões triangulares. Assim, introduzindo o novo sistema de coordenadas

$$\begin{cases} s = \tau' \\ u = \tau' - \tau'' \end{cases}, \text{ p/ } \tau' > \tau'' \quad (3.9)$$

e

$$\begin{cases} s = \tau'' \\ u = \tau'' - \tau' \end{cases}, \text{ p/ } \tau'' > \tau', \quad (3.10)$$

resulta

$$P_T = \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \times$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} ds \int_0^{s-\tau_0} du \left[e^{-iu\Delta E} \langle 0 | \phi(s) \phi(s-u) | 0 \rangle + e^{iu\Delta E} \langle 0 | \phi(s-u) \phi(s) | 0 \rangle \right]. \quad (3.11)$$

Utilizando a propriedade dos campos reais $\langle 0 | \phi(0) \phi(u) | 0 \rangle^* = \langle 0 | \phi(u) \phi(0) | 0 \rangle$, é possível reescrever (3.11) como

$$P_T = 2\mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{\tau_0}^{\tau} ds \int_0^{s-\tau_0} du \operatorname{Re} \left(e^{-iu\Delta E} \langle 0 | \phi(s) \phi(s-u) | 0 \rangle \right), \quad (3.12)$$

onde $\operatorname{Re}(z)$ representa a parte real de uma função $f(z)$. As equações (3.11) e (3.12) fornecem a probabilidade total de ocorrer uma transição no intervalo $\tau - \tau_0$; assim, conforme aumente o intervalo é aceitável assumir que a probabilidade também aumente. Deste modo, se definirá a probabilidade instantânea como sendo a derivada de P_T em relação a τ

$$\mathcal{P}_t \equiv \frac{d}{d\tau} P_T$$

$$= 2\mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \int_0^{\tau-\tau_0} du \operatorname{Re} \left(e^{-iu\Delta E} \langle 0 | \phi(\tau) \phi(\tau-u) | 0 \rangle \right), \quad (3.13)$$

onde foi utilizada a regra de Leibniz para diferenciação sob o sinal de integração

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\int_{a(\tau)}^{b(\tau)} f(\tau, u) du \right] &= f(\tau, b(\tau)) \frac{d}{d\tau} b(\tau) \\ &- f(\tau, a(\tau)) \frac{d}{d\tau} a(\tau) + \int_{a(\tau)}^{b(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau, u) du. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se a função de Wightman for invariante sob translações temporais, isto é,

$$\langle 0 | \phi(\tau' + \Delta\tau) \phi(\tau'' + \Delta\tau) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(\tau') \phi(\tau'') | 0 \rangle, \quad (3.15)$$

resulta que $\langle 0 | \phi(\tau) \phi(\tau - u) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(u) \phi(0) | 0 \rangle$ e, para a probabilidade instantânea,

$$\mathcal{P}_t = \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\tau+\tau_0}^{\tau-\tau_0} du e^{-iu\Delta E} \langle 0 | \phi(u) \phi(0) | 0 \rangle. \quad (3.16)$$

A função de Wightman é bastante conhecida e pode ser explicitamente calculada ²

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi^2 [|\mathbf{x}(\tau') - \mathbf{x}(\tau'')|^2 - (t(\tau') - t(\tau'') - i\epsilon)^2]}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

substituindo este resultado em (3.16) resulta na probabilidade

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t &= \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \times \\ &\int_{-\tau+\tau_0}^{\tau-\tau_0} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{4\pi^2 [|\mathbf{x}(\tau') - \mathbf{x}(\tau'')|^2 - (t(\tau') - t(\tau'') - i\epsilon)^2]}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

Por último, constata-se que, mesmo a parametrização inercial em (3.18), resulta em probabilidades divergentes. No entanto, é possível realizar o estudo assintótico assumindo que o detector está "ligado" desde um tempo remoto, isto é, $\tau_0 \rightarrow -\infty$

²Este cálculo é apresentado no apêndice B .

$$\mathcal{P}_t = \mu^2 \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{4\pi^2 [|\mathbf{x}(\tau') - \mathbf{x}(\tau'')|^2 - (t(\tau') - t(\tau'') - i\epsilon)^2]}. \quad (3.19)$$

3.1.1 Modelos de Detector

A continuação, é considerado o caso no qual o detector segue uma linha de mundo inercial, ou seja, possui parametrização

$$t(\tau) = \gamma\tau, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 + v\gamma\tau.$$

Substituindo essa parametrização, obtemos para a função de Wightman (3.17)

$$\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2 (\tau' - \tau'' - i\epsilon)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)} \quad (3.21)$$

e, para a probabilidade (3.18)

$$\mathcal{P}_t = -\frac{\mu^2}{4\pi^2} \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{(u - i\epsilon)^2}. \quad (3.22)$$

A integral em (3.22) possui um polo duplo e deve ser resolvida pelo teorema do resíduo³, resultando $\mathcal{P}_t = 0$. Logo, a probabilidade de transição para um estado excitado é nula, uma vez que, como esperado, um detector em repouso não deve excitar espontaneamente.

Considera-se agora o caso em que o detector é uniformemente acelerado; como foi visto na seção 2.1, isso equivale a uma linha de mundo hiperbólica, que possui parametrização

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau), \\ t(\tau) &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau). \end{aligned} \quad (3.23)$$

³O cálculo pode ser encontrado no apêndice C.

Da mesma maneira encontramos a função de Wightman substituindo tal parametrização⁴,

$$\langle 0 | \phi(\tau) \phi(\tau') | 0 \rangle = \frac{-\alpha^2}{16\pi^2 \sinh^2 \left(\frac{\alpha}{2} (\tau - \tau') - i\epsilon\alpha \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)}. \quad (3.24)$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\sinh(x) = -i \sin(ix)$ e a soma de frações parciais para a cossecante⁵

$$\csc^2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - \pi n)^{-2}, \quad (3.25)$$

obtemos finalmente a função de Wightman

$$\langle 0 | \phi(\tau) \phi(\tau') | 0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\tau - \tau') - i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2}. \quad (3.26)$$

Deste modo, a probabilidade (3.16) resultante é

$$\mathcal{P}_t = -\frac{\mu^2}{4\pi^2} \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{[u - i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2}. \quad (3.27)$$

A integral (3.27) possui um polo duplo e deve ser novamente resolvida pelo teorema do resíduo, obtendo-se

$$\mathcal{P}_t = -\frac{\mu^2}{2\pi} \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \Delta E \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}n} \right]; \quad (3.28)$$

utilizando a soma de uma série de Laurent, $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$ com $z \in \mathbb{C}$, resulta

$$\mathcal{P}_t = \frac{\mu^2}{2\pi} \sum_i |\langle E_i | M(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{\Delta E}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}} - 1}. \quad (3.29)$$

⁴O cálculo para encontrar a equação (3.24) é feito no apêndice B.2.

⁵A demonstração desta relação é apresentada em C.1.

Unruh reconhece o fator $\left[e^{\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}} - 1\right]^{-1}$ como sendo a distribuição de Planck, encontrando a temperatura

$$T = \frac{\alpha}{2\pi k_B}, \quad (3.30)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Além disso, ressalta que, dada a relação (3.30), o mesmo resultado teria sido obtido se um detector não acelerado permanecesse em repouso mas imerso em um banho térmico a temperatura T .

3.1.2 Detector do tipo Dipolo

Ao invés de considerarmos o modelo de detector de DeWitt, podemos substituir a interação proposta (3.1) por uma nova interação a qual remete a uma interação do tipo dipolo elétrico,

$$H_I(\tau) = \mu \chi(\tau) \frac{d}{d\tau} \phi(t(\tau), \mathbf{x}(\tau)), \quad (3.31)$$

onde $\chi(\tau)$ faz agora o papel do detector e respeita a mesma equação de evolução (3.5). Procedendo de forma totalmente análoga, obtemos a probabilidade de transição equivalente a (3.19), dada por

$$\mathcal{P}_t = -\frac{\mu^2}{4\pi^2} \sum_i |\langle E_i | \chi(0) | E_0 \rangle|^2 \times \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\Delta E} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{[\mathbf{x}(\tau') - \mathbf{x}(\tau'')]^2 - (t(\tau') - t(\tau'') - i\epsilon)^2}. \quad (3.32)$$

Considerando as mesmas parametrizações propostas em 3.1.1, constatamos que para o caso inercial a probabilidade de transição continua nula, pois a que a derivada presente na integral (3.32) não modifica a localização do polo, que permanece fora do contorno fechado de integração.

Para o caso do detector uniformemente acelerado, a nova equação para a probabilidade é

$$\mathcal{P}_t = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \sum_i |\langle E_i | \chi(0) | E_0 \rangle|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-is\Delta E} \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{[u - i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2}. \quad (3.33)$$

Novamente recorrendo ao teorema do resíduo, resulta

$$\mathcal{P}_t = \frac{\mu^2}{2\pi} \sum_i |\langle E_i | \chi(0) | E_0 \rangle|^2 \frac{[\Delta E]^3}{e^{\frac{2\pi \Delta E}{\alpha}} - 1}, \quad (3.34)$$

De (3.34) concluímos que existe uma dependência do resultado com o modelo de detector proposto. Em (6.1.2) o acoplamento do tipo derivativo será revisitado, fornecendo uma nova perspectiva ao aqui discutido.

4 EFEITOS DE TEMPERATURA

Na seção 4.1 estudaremos o formalismo introduzido por Umezawa e Takahashi (TAKAHASHI; UMEZAWA, 1975) para uma teoria de campo térmica de tempo real, onde médias estatísticas de observáveis físicos correspondem a valores esperados em um vácuo térmico de Bogoliubov. A seguir, o aplicaremos ao campo escalar e analisaremos a proposta de Misra (ZHENG; JIANYANG; MISRA, 1996) para um estado de equilíbrio *quase-térmico*. Por último, em 4.2 partindo da entropia de von Neumann, analisaremos como a entropia de um sistema acelerado respeita a hipótese de equilíbrio térmico.

4.1 THERMO FIELD DYNAMICS

Para um sistema quântico em equilíbrio térmico a temperatura T , no ensemble canônico, a média estatística de um observável A , é definida como

$$\langle A \rangle \equiv \text{Tr} [\rho A] = Z^{-1} \text{Tr} [A e^{-\beta H}] , \quad (4.1)$$

onde

$$Z = \text{Tr} [e^{-\beta H}] , \quad (4.2)$$

$$\beta = (k_B T)^{-1} , \quad (4.3)$$

sendo H o hamiltoniano total do sistema, Z a função de partição correspondente e k_B a constante de Boltzmann. Busca-se construir uma representação na qual os valores esperados em um vácuo térmico coincidam com as médias estatísticas no ensemble,

$$\langle 0_{(\beta)} | A | 0_{(\beta)} \rangle = \langle A \rangle . \quad (4.4)$$

Definida a atuação nos estados ortonormais

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle , \quad (4.5)$$

$$\langle m | n \rangle = \delta_{mn} , \quad (4.6)$$

a equação para as médias estatísticas (4.1), e consequentemente o valor esperado (4.4), tornam-se

$$\langle 0_{(\beta)} | A | 0_{(\beta)} \rangle = Z^{-1} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \langle m | A | n \rangle \delta_{mn}. \quad (4.7)$$

Assume-se que o estado $|0_{(\beta)}\rangle$ possa ser expandido em termos dos autoestados $|n\rangle$

$$|0_{(\beta)}\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n\rangle; \quad (4.8)$$

substituindo (4.8) em (4.7) e comparando ambos os membros da equação resultante, devemos ter, necessariamente,

$$f_m^*(\beta) f_n(\beta) = Z^{-1} e^{-\beta E_n} \delta_{mn}. \quad (4.9)$$

Da equação anterior conclui-se que, devido ao termo δ_{mn} , os coeficientes $f_n(\beta)$ não podem ser meramente números, mas devem ser estados. Assim, o estado $|0_{(\beta)}\rangle$ está no espaço gerado pelos estados $|n\rangle$ e $f_n(\beta)$. Para construir esta representação é conveniente introduzir um sistema adicional fictício "idêntico" ao original, chamado sistema dual, de forma que $f_n(\beta)$ pertença a este novo sistema. Tal sistema é caracterizado pelo hamiltoniano \tilde{H} , o qual atua nos autoestados $|\tilde{n}\rangle$ de acordo com

$$\tilde{H} |\tilde{n}\rangle = E_n |\tilde{n}\rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle \tilde{m} | \tilde{n} \rangle = \delta_{mn}, \quad (4.11)$$

onde o autovalores E_n são, por definição, iguais aos autovalores do sistema original. Da forma da equação (4.9) conclui-se que

$$f_n(\beta) = Z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} |\tilde{n}\rangle; \quad (4.12)$$

substituindo na expressão (4.8) para $|0_{(\beta)}\rangle$ resulta

$$|0_{(\beta)}\rangle = Z^{-\frac{1}{2}} \sum_n e^{-\frac{1}{2}\beta E_n} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (4.13)$$

onde

$$|n, \tilde{n}\rangle \equiv |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle. \quad (4.14)$$

Devido à impossibilidade do espaço de Hilbert original \mathfrak{H} descrever corretamente o espaço dos estados $|0_{(\beta)}\rangle$, tornou-se necessária a introdução do espaço dual $\tilde{\mathfrak{H}}$, de modo que o novo espaço \mathcal{H} será definido como sendo uma projeção do produto tensorial dos subespaços

anteriores, \mathfrak{H} e $\widetilde{\mathfrak{H}}$,

$$\mathcal{H} = \mathfrak{H} \otimes \widetilde{\mathfrak{H}}. \quad (4.15)$$

Para que a equação (4.7) seja satisfeita, um operador qualquer A deverá necessariamente atuar somente no subespaço correspondente

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{m}, m | A | n, \widetilde{n} \rangle &= \langle m | A | n \rangle \cdot \langle \widetilde{m} | \widetilde{n} \rangle = \langle m | A | n \rangle \delta_{mn}, \\ \langle \widetilde{m}, m | \widetilde{A} | n, \widetilde{n} \rangle &= \langle \widetilde{m} | \widetilde{A} | \widetilde{n} \rangle \cdot \langle m | n \rangle = \langle \widetilde{m} | \widetilde{A} | \widetilde{n} \rangle \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

o que caracteriza a separabilidade dos dois espaços. Pode-se, então, definir a atuação dos operadores $A \in \mathfrak{H}$ e $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathfrak{H}}$ sobre o espaço \mathcal{H} como

$$A \equiv A \otimes \mathbb{I}, \quad (4.17)$$

$$\widetilde{A} \equiv \mathbb{I} \otimes \widetilde{A}. \quad (4.18)$$

O mapeamento entre os subespaços \mathfrak{H} e $\widetilde{\mathfrak{H}}$ é chamado conjugação dual ou til e define uma série de regras:

$$\widetilde{\widetilde{AB}} = \widetilde{A}\widetilde{B}, \quad (4.19)$$

$$(\alpha \widetilde{A} + \beta B) = \alpha^* \widetilde{A} + \beta^* \widetilde{B}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (4.20)$$

$$\widetilde{A}^\dagger = (\widetilde{A})^\dagger, \quad (4.21)$$

$$\widetilde{\widetilde{A}} = \sigma A, \quad (4.22)$$

onde

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{p/ bósons} \\ -1, & \text{p/ férmions} \end{cases}. \quad (4.23)$$

Dessas propriedades, podemos concluir que a correspondência é injetiva, o mapeamento é antilinear com respeito ao espaço original e invariante frente a transformações de Bogoliubov. Além destas, da separabilidade dos estados, resulta

$$[A, \widetilde{B}]_\pm = [A, \widetilde{B}^\dagger]_\pm = 0, \quad (4.24)$$

onde o comutador e o anticomutador devem utilizados conforme a álgebra tratada seja bosônica ou fermiônica.

4.1.1 Campo Escalar Livre

Aplicaremos o formalismo desenvolvido ao campo escalar livre, definindo o estado

$$|n, \tilde{n}\rangle \equiv |n_0, \tilde{n}_0\rangle \otimes |n_1, \tilde{n}_1\rangle \otimes |n_2, \tilde{n}_2\rangle \otimes \dots = \bigotimes_{\mathbf{k}=0}^{\infty} |n_{\mathbf{k}}, \tilde{n}_{\mathbf{k}}\rangle; \quad (4.25)$$

atuando o hamiltoniano (2.40), encontramos os autovalores de H_F ,

$$H_F |n, \tilde{n}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} |n, \tilde{n}\rangle, \quad (4.26)$$

de onde resulta que a função de partição total é o produtório das funções de partição para cada momento,

$$Z = \prod_{\mathbf{k}} Z_{\mathbf{k}}. \quad (4.27)$$

Dada a função de partição total do sistema, podemos determinar o estado $|0_{(\beta)}\rangle$. A álgebra bosônica não impõe nenhum limite superior aos estados acessíveis. Assim, calculando a função de partição $Z_{\mathbf{k}}$, obtemos

$$Z_{\mathbf{k}} = \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}}, \quad (4.28)$$

onde foi utilizada a soma de uma série geométrica. O mesmo resultado para a função de partição (4.28) pode ser encontrado se exigirmos a normalização do estado $|0_{(\beta)}\rangle$; assim sendo, o estado já está normalizado, por construção. A expressão (4.13) para o estado $|0_{(\beta)}\rangle$ resulta, neste caso,

$$|0_{(\beta)}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{k}=0}^{\infty} |0_{(\beta)}\rangle_{\mathbf{k}}, \quad (4.29)$$

onde

$$|0_{(\beta)}\rangle_{\mathbf{k}} = [1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}]^{\frac{1}{2}} \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}} |n_{\mathbf{k}}, \tilde{n}_{\mathbf{k}}\rangle. \quad (4.30)$$

Nota-se que o estado $|0_{(\beta)}\rangle$ não está vazio; logo, esperamos que a média estatística do operador número $N_{\mathbf{k}}$ não seja nula. Assim,

$$\langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle = \langle 0_{(\beta)} | 0_{(\beta)} \rangle_1 \cdots \langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle_{\mathbf{k}} \cdots, \quad (4.31)$$

onde

$$\langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle_{\mathbf{k}} = [1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}] \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}} \langle \tilde{n}_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}} | N_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}}, \tilde{n}_{\mathbf{k}} \rangle. \quad (4.32)$$

A partir da soma da série geométrica pode-se obter, por diferenciação,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad (4.33)$$

de modo que o número médio de partículas no estado é a distribuição de Bose-Einstein

$$\langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle = [e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1]^{-1} \equiv f_B. \quad (4.34)$$

Portanto, como esperado, o número médio de partículas no vácuo $|0_{(\beta)}\rangle$ está relacionado à temperatura através da distribuição de Bose-Einstein. Isto significa que um estado de vácuo de Minkowski conforme (4.34) está em equilíbrio térmico. É interessante reparar que a média estatística do dubleto $\tilde{a}_1 a_{\mathbf{k}}$ que, a princípio, pode parecer nula, de fato contém uma distribuição associada. Assim, de (4.16) e (4.25),

$$\begin{aligned} \langle \tilde{m}, m | \tilde{a}_1 a_{\mathbf{k}} | n, \tilde{n} \rangle &= \langle m | a_{\mathbf{k}} | n \rangle \cdot \langle \tilde{m} | \tilde{a}_1 | \tilde{n} \rangle \\ &= [\langle m_0 | n_0 \rangle \cdots \langle m_{\mathbf{k}} | a_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}} \rangle \cdots] \cdot [\langle \tilde{m}_0 | \tilde{n}_0 \rangle \cdots \langle \tilde{m}_1 | \tilde{a}_1 | \tilde{n}_1 \rangle \cdots] \quad (4.35) \\ &= \delta_{m_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}-1} \delta_{m_1, n_1-1} \sqrt{n_{\mathbf{k}}} \sqrt{n_1} = n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \delta_{m_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}-1}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\langle 0_{(\beta)} | \tilde{a}_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle \\ &= [1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}] \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \sum_{m_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}}+m_{\mathbf{k}})} n_{\mathbf{k}} \delta_{m_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}-1} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \\ &= [1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}}] \sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_{\mathbf{k}}(2n_{\mathbf{k}}-1)} n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_{\mathbf{k}}}}{(1-e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}})} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} = [f_B (1 + f_B)]^{\frac{1}{2}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.1.2 Conexão entre Operadores da Thermo Field Dynamics e Rindler

Partindo das relações (2.57) e (2.58), iremos reescrevê-las como

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\mathbf{k}}^R &= C_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^R - S_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}, \\ \bar{a}_{\mathbf{k}}^L &= C_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^L - S_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{R\dagger},\end{aligned}\tag{4.37}$$

onde

$$\begin{aligned}C_{\mathbf{k}} &= \left[2\sinh\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}\pi}{a}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{2a}} = \left[1 - e^{-\frac{2\pi}{a}\omega_{\mathbf{k}}}\right]^{-\frac{1}{2}}, \\ S_{\mathbf{k}} &= -\left[2\sinh\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}\pi}{a}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{2a}} = -\left[e^{\frac{2\pi}{a}\omega_{\mathbf{k}}} - 1\right]^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Tomando o valor esperado do operador número do *wedge* R no vácuo $|0_{(\beta)}\rangle$ resulta

$$\begin{aligned}&\langle 0_{(\beta)} | \bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} \bar{a}_{\mathbf{l}}^R | 0_{(\beta)} \rangle \\ &= C_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{l}}^R | 0_{(\beta)} \rangle + S_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | b_{-\mathbf{k}}^L b_{-\mathbf{l}}^{L\dagger} | 0_{(\beta)} \rangle \\ &\quad - C_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | \left[b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{l}}^{L\dagger} + b_{-\mathbf{k}}^L b_{\mathbf{l}}^R \right] | 0_{(\beta)} \rangle\end{aligned}\tag{4.39}$$

e, por completeza, considerando também a combinação $\bar{a}_{\mathbf{k}}^R \bar{a}_{\mathbf{l}}^R$,

$$\begin{aligned}&\langle 0_{(\beta)} | \bar{a}_{\mathbf{k}}^R \bar{a}_{\mathbf{l}}^R | 0_{(\beta)} \rangle \\ &= C_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | b_{\mathbf{k}}^R b_{\mathbf{l}}^R | 0_{(\beta)} \rangle + S_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} b_{-\mathbf{l}}^{L\dagger} | 0_{(\beta)} \rangle \\ &\quad - C_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{l}} \langle 0_{(\beta)} | \left[b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{l}}^{L\dagger} + b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} b_{\mathbf{l}}^R \right] | 0_{(\beta)} \rangle.\end{aligned}\tag{4.40}$$

Ao considerar as expressões (4.39) e (4.40) e os valores esperados dos operadores de $b_{\mathbf{k}}^R$ e $b_{\mathbf{k}}^L$ no vácuo térmico (4.30) devemos assegurar que os operadores $b_{\mathbf{k}}^R$ e $b_{\mathbf{k}}^L$ pertençam ao mesmo espaço de Fock e que,

portanto, a relação

$$\left[b_{\mathbf{k}}^R, b_{\mathbf{k}'}^{L\dagger} \right] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \quad (4.41)$$

seja válida, estabelecendo o primeiro mapeamento

$$\{ b_{\mathbf{k}}^R, b_{\mathbf{k}}^L \} \rightarrow a_{\mathbf{k}}. \quad (4.42)$$

Para este mapeamento, diretamente de (4.34) encontramos¹

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{l}}^R \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 &= \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{L\dagger} b_{\mathbf{l}}^L \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 \\ &= \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{l}}^L \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 = f_B \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

os demais valores esperados sendo nulos ou podendo ser obtidos através das relações de comutação. Assim, para os valores esperados (4.39) e (4.40), resulta

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{(\beta)} \left| \bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} \bar{a}_{\mathbf{l}}^R \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 &= C_{\mathbf{k}}^2 f_B \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} + S_{\mathbf{k}}^2 (1 + f_B) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) - 1 \right] \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{(\beta)} \left| \bar{a}_{\mathbf{k}}^R \bar{a}_{\mathbf{l}}^{R\dagger} \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 &= -C_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}} (1 + 2f_B) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{l}} \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{l}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tal mapeamento foi utilizado por alguns autores como Misra (ZHENG; JIANYANG; MISRA, 1996), onde a média resultante, tomada em um estado de equilíbrio térmico no espaço-tempo de Minkowski não corresponde àquela em um estado térmico ordinário na variedade de Rindler, por não obedecer à lei de distribuição de Planck. Este caracteriza um novo estado de equilíbrio *quase-térmico*, envolvendo dois parâmetros de quase temperatura, tal que

$$\left\langle 0_{(\beta)} \left| \bar{N}_{\mathbf{k}}^R \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_1 = \frac{e^{\frac{2\pi}{a} \omega_{\mathbf{k}}} + e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}}}{\left(e^{\frac{2\pi}{a} \omega_{\mathbf{k}}} - 1 \right) (e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1)}. \quad (4.46)$$

Por outro lado, para outros autores (UNRUH, 1976) os operadores

¹Identificaremos o primeiro mapeamento pelo subíndice 1.

$b_{\mathbf{k}}^R$ e $b_{\mathbf{k}}^L$ pertencem a diferentes espaços de Fock e, portanto,

$$\left[b_{\mathbf{k}}^R, b_{\mathbf{k}'}^{L\dagger} \right] = 0. \quad (4.47)$$

Com esta condição, é possível escrever o vácuo de Rindler como²

$$|0\rangle_R = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{C_{\mathbf{k}}} e^{\frac{S_{\mathbf{k}}}{C_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}} |0\rangle. \quad (4.48)$$

Levando em conta a forma funcional de (4.48) e a estrutura da TFD, é natural sugerirmos o segundo mapeamento

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}}^R &\rightarrow a_{\mathbf{k}}, \\ b_{\mathbf{k}}^L &\rightarrow \tilde{a}_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

resultando nos novos valores esperados³

$$\begin{aligned} \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{l}}^R \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 &= \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{L\dagger} b_{\mathbf{l}}^L \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 = f_B \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}}, \\ \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^R b_{\mathbf{l}}^L \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 &= \left\langle 0_{(\beta)} \left| b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{l}}^{L\dagger} \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 = [f_B (1 + f_B)]^{\frac{1}{2}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \end{aligned} \quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned} &\left\langle 0_{(\beta)} \left| \bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} \bar{a}_{\mathbf{l}}^R \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 \\ &= C_{\mathbf{k}}^2 f_B \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} + S_{\mathbf{k}}^2 (1 + f_B) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} - C_{\mathbf{k}} S_{\mathbf{k}} 2 [f_B (1 + f_B)]^{\frac{1}{2}} \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{l}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) - 1 \right] \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} - \frac{1}{2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{l}}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\left\langle 0_{(\beta)} \left| \bar{a}_{\mathbf{k}}^R \bar{a}_{\mathbf{l}}^{R\dagger} \right| 0_{(\beta)} \right\rangle_2 = 0. \quad (4.52)$$

²Tal demonstração se encontra no apêndice D.

³Identificamos o segundo mapeamento pelo subíndice 2.

Ao analisar o operador número neste mapeamento,

$$\begin{aligned} \langle 0_{(\beta)} | \bar{N}_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle_2 &= \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) - 1 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

observamos a existência um termo divergente de frequência nula, $-\frac{\beta \omega_0}{2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi \omega_0}{a} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\beta \omega_0}{2} \right)$ o qual, a princípio, poderíamos considerar como sendo a energia de ponto zero, que leva à divergência em um referencial no espaço-tempo de Minkowski. No entanto, tal divergência surge, inevitavelmente, do fato dos operadores de Rindler serem uma combinação de frequências positiva e negativa, sendo impossível eliminá-la pelo ordenamento normal ou qualquer outro.

4.2 ENTROPIA NA THERMO FIELD DYNAMICS

Na mecânica estatística quântica, a entropia de von Neumann é a extensão dos conceitos da entropia clássica de Gibbs. Assim, para um sistema quântico descrito pela matriz densidade ρ , a entropia de von Neumann é definida como

$$S \equiv -\operatorname{Tr} [\rho \ln \rho], \quad (4.54)$$

a qual pode ser escrita em termos das médias estatísticas (4.1) e, consequentemente, de (4.4),

$$S = -\langle \ln \rho \rangle = -\langle 0_{(\beta)} | \ln \rho | 0_{(\beta)} \rangle. \quad (4.55)$$

Para um sistema em equilíbrio térmico, isto é tomado, $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$,

$$S = \langle 0_{(\beta)} | \ln Z + \beta H | 0_{(\beta)} \rangle = \langle 0_{(\beta)} | K | 0_{(\beta)} \rangle, \quad (4.56)$$

onde definiremos o operador entropia como sendo (TAKAHASHI; UMEZAWA, 1975)

$$K \equiv \ln Z + \beta H. \quad (4.57)$$

4.2.1 Entropia do Campo Escalar Livre

Calculando o operador entropia para o campo livre cujo hamiltoniano é dado por (4.26) e função de partição (4.28), resulta

$$K = \sum_{\mathbf{k}} [\beta \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} - \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}})]. \quad (4.58)$$

Deste modo, temos para a entropia

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} - \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right] \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} [f_B \ln f_B - (1 + f_B) \ln(1 + f_B)], \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde f_B é a distribuição de Bose-Einstein. Assim, a equação (4.59) é exatamente a entropia de um gás de bosons não interagentes.

Definimos agora o hamiltoniano de Rindler como $\bar{H} = U H_F U^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \bar{N}_{\mathbf{k}}^R$, onde U é um operador unitário⁴. Assim, o operador entropia resultante, similar a (4.58), para um observador acelerado é dado por

$$\bar{K} = \sum_{\mathbf{k}} [\beta \omega_{\mathbf{k}} \bar{N}_{\mathbf{k}} - \ln \bar{Z}]. \quad (4.60)$$

Da ciclicidade do traço temos $\bar{Z} = Z$, de modo que, calculando a entropia com \bar{K} e utilizando (4.46) para o valor esperado de $\bar{N}_{\mathbf{k}}$, resulta para o primeiro mapeamento

$$\bar{S}_1 = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[\coth\left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a}\right) \coth\left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2}\right) - 1 \right] - \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right\}. \quad (4.61)$$

Utilizando (4.51), para o segundo mapeamento, segue que

$$\begin{aligned} \bar{S}_2 &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \left[\coth\left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a}\right) \coth\left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2}\right) - 1 \right] - \ln(1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right\} \\ &\quad - \frac{\beta \omega_0}{2} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi \omega_0}{a}\right) \operatorname{csch}\left(\frac{\beta \omega_0}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Observamos que, no limite $a \rightarrow 0$, as equações (4.61) e (4.62)

⁴Maiores detalhes sobre a transformação podem ser encontrados no apêndice D.

retornam a (4.59); no entanto, para uma dada aceleração, no limite para baixas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$, ambas as expressões divergem, ou seja, as entropias (4.61) e (4.62) possuem problemas com a energia de ponto zero. Como discutido anteriormente, a divergência em \bar{S}_2 é inevitável e não é eliminada pelo ordenamento normal. Desse modo, realizando o ordenamento normal eliminamos esta patologia em \bar{S}_1 , resultando

$$\begin{aligned} : \bar{S}_1 := & \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \left[\coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) - 1 \right] - \ln (1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \right\} \\ = & - \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) f_B \ln f_B - [1 + \coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) f_B] \ln (1 + f_B) \right\}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

A equação (4.63) é similar a (4.59), com a distribuição de Bose-Einstein ponderada por um termo de aceleração, isto é, $f_B \rightarrow \coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) f_B$. Da mesma maneira, no limite $a \rightarrow 0$, a equação (4.63) retorna a (4.59); já no limite para baixas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$, $: \bar{S}_1 : \rightarrow 0$ e, portanto, $: \bar{S}_1 :$ é uma boa candidata à entropia de um gás de bósons acelerados.

5 MODELOS DE FORD-O'CONNELL E FKM

Na seção 5.1 apresentaremos os fundamentos da teoria clássica do movimento Browniano através da equação de Langevin usada para descrever tal movimento. Em seguida, na seção 5.2, discutiremos brevemente a proposta de Ford e O'Connell (FORD; O'CONNELL, 2006). Na seção 5.3 mostraremos que um sistema de osciladores harmônicos acoplados pode ser visto como um modelo de um banho térmico, de modo que uma partícula harmonicamente acoplada com este, em um limite adequado, comporta-se como uma partícula browniana. Para finalizar, consideraremos o caso uniformemente acelerado.

5.1 A EQUAÇÃO DE LANGEVIN

Uma partícula de massa M e momento P é imerso em um fluido homogêneo de partículas de massa m , ($M \gg m$) com o qual sofre contínuas colisões que tornam seu movimento errático. A equação introduzida por Langevin para descrever fenomenologicamente esse movimento é

$$\frac{d}{dt}p(t) = -\gamma p(t) + F(t). \quad (5.1)$$

A força total atuando sobre a partícula pode ser separada em duas partes. A primeira, $-\gamma p(t)$, descreve o efeito "conjunto" de colisões, amortecendo o momento da partícula com um coeficiente de atrito γ . A segunda, é uma força flutuante, $F(t)$, chamada força de Langevin, que descreve flutuações da força instantânea em torno de seu valor médio. Observa-se que o banho térmico é descrito por apenas dois parâmetros, o coeficiente de atrito e a temperatura, e que apenas as duas primeiras derivadas da posição da partícula browniana comparecem na equação, ou seja, não há efeitos de memória. Na Equação (5.1), $F(t)$ é considerada como sendo uma força externa, independente de $p(t)$, descrita por uma distribuição aleatória de t , satisfazendo as seguintes propriedades:

- O valor médio de $F(t)$ é zero:

$$\langle F(t) \rangle = 0. \quad (5.2)$$

- A função de correlação para a força de Langevin, que descreve a dinâmica das flutuações de $F(t)$, tem a forma

$$\langle F(t) F(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad (5.3)$$

onde $D = M\gamma k_B T$ é o coeficiente de difusão. As propriedades de paridade e invariância por translação temporal da função de correlação (5.3) devem-se ao fato de $F(t)$ ser uma função clássica. Nas próximas seções veremos que o cálculo da função de correlação é essencial, pois graças a esta seremos capazes de relacionar as teorias propostas com a mecânica estatística clássica.

5.2 O CAMPO ESCALAR REAL E UM OSCILADOR ACELERADO

Na seção 3.1.1 observamos que um detector com aceleração uniforme e outro em equilíbrio térmico apresentam a mesma forma funcional para a probabilidade de transição instantânea \mathcal{P}_t , levando à chamada temperatura de Unruh. O que é mais controverso é se o sistema verdadeiramente irradia ou não. Na sequência, trataremos um oscilador como um detector e calcularemos o fluxo de energia do campo, apresentando de forma explícita os cálculos para um oscilador acelerado.

Partiremos da lagrangiana do campo escalar real interagindo com um oscilador, a partir da qual podemos deduzir as equações de movimento. Assim, dada a interação de um oscilador com um campo escalar real, onde o acoplamento é dado através da velocidade, a lagrangiana, relativística para este sistema é

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \frac{dt}{d\tau} - \frac{1}{2}Ky^2 \frac{d\tau}{dt} - 2\sigma \frac{dy}{dt} \phi[x(\tau), t(\tau)] \\ & + \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.4)$$

às vezes associada à eletrodinâmica escalar. Observamos que o deslocamento do oscilador é na direção y , e o do campo direção x . A partir das equações de movimento de Euler-Lagrange, encontramos para o oscilador

$$m \frac{d^2 y}{d\tau^2} + Ky = 2\sigma \frac{d}{d\tau} \phi[x(\tau), t(\tau)] \quad (5.5)$$

e para o campo

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2 \frac{dy}{dt} \delta [x - x(\tau)]. \quad (5.6)$$

A solução da equação da onda não homogênea (5.6) é da forma, $\phi(x, t) = \phi^h(x, t) + \phi^p(x, t)$, onde a solução homogênea é dada por

$$\phi^h(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \left[a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^\dagger e^{i(\omega_k t - kx)} \right]; \quad (5.7)$$

note que quando $\sigma = 1$ temos o equivalente unidimensional de (2.31). A solução particular é dada por

$$\phi^p(x, t) = -y(\tau). \quad (5.8)$$

Escrevendo a solução total como $\phi(x, t) = \phi^h(x, t) - y(\tau)$ e a substituindo em (5.5) resulta

$$m \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + 2\sigma \frac{dy(\tau)}{d\tau} + Ky(\tau) = F(\tau). \quad (5.9)$$

A equação anterior pode ser vista como uma equação do tipo Langevin, onde $\gamma = 2\sigma$, sendo a força de Langevin

$$F(\tau) = 2\sigma \frac{d}{d\tau} \phi^h[x(\tau), t(\tau)]. \quad (5.10)$$

Introduzindo, convenientemente, a expansão de Fourier

$$e^{-i[\omega t(\tau) - kx(\tau)]} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau}, \quad (5.11)$$

rescrevemos a equação (5.7) na forma

$$\begin{aligned} & \phi^h[x(\tau), t(\tau)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \left[a_k c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} + a_k^\dagger c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

e, portanto,

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 dk \sqrt{\frac{\sigma}{\pi\omega_k}} \omega_1 \left[a_k c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} - a_k^\dagger c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} \right]. \quad (5.13)$$

Substituindo (5.13) em (5.9) e propondo uma solução da forma exponencial para $y(\tau)$, encontramos

$$y(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 dk \sqrt{\frac{\sigma}{\pi\omega_k}} \omega_1 \times \left[a_k \alpha(\omega_1) c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} - a_k^\dagger \alpha(\omega_1)^* c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} \right], \quad (5.14)$$

onde

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 - i2\sigma\omega + K}. \quad (5.15)$$

Por último, calculamos a função de correlação da força de Langevin (5.13)

$$\langle F(\tau) F(\tau') \rangle = \frac{2\sigma}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \frac{dk}{\omega_k} \omega_1 \omega_2 \times \left[(1 + f_b) c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* e^{-i\omega_1 \tau} e^{i\omega_2 \tau'} + f_b c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2) e^{i\omega_1 \tau} e^{-i\omega_2 \tau'} \right], \quad (5.16)$$

onde f_B é a distribuição de Bose-Einstein (4.34). Infelizmente, a integral dos momentos k na equação (5.16) se apresenta algo complexa; no entanto, para o caso $T = 0$ é possível encontrar a relação¹

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = \frac{4\pi^2 e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega_1} \delta(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 \sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega_1\right)}, \quad (5.17)$$

a qual, substituída em (5.16) fornece

$$\begin{aligned} \langle F(\tau) F(\tau') \rangle &= \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[1 + \coth\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega\right) \right] e^{-i\omega(\tau - \tau')} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left\{ \coth\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega\right) \cos[\omega(\tau - \tau')] - i \sin[\omega(\tau - \tau')] \right\}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde eliminamos o subíndice em ω .

¹Tal demonstração se encontra no apêndice E.2.

5.2.1 Fluxo de Energia

Calculamos agora o fluxo de energia do campo. Da equação da continuidade $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, temos para a energia no caso unidimensional que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (5.19)$$

onde ε é a densidade de energia

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\gamma}{2} \left\{ \left[\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right]^2 + c^2 \left[\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \right]^2 \right\} \quad (5.20)$$

e j o fluxo de energia

$$j(x, t) = -\frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right]. \quad (5.21)$$

Consideremos agora o fluxo médio de energia irradiada para o caso acelerado; da parametrização hiperbólica (3.23) temos a relação

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{\alpha(t+x)}, \quad (5.22)$$

a qual aplicada ao fluxo (5.21) resulta

$$\langle j(x, t) \rangle = \langle j_0(x, t) \rangle + \langle j_{dir}(x, t) \rangle + \langle j_{int}(x, t) \rangle, \quad (5.23)$$

onde definimos $\langle j_0(x, t) \rangle$ como sendo o fluxo de energia na ausência do oscilador,

$$\langle j_0(x, t) \rangle \equiv -\frac{\gamma}{2} \left\langle \frac{\partial \phi^h}{\partial t} \frac{\partial \phi^h}{\partial x} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \frac{\partial \phi^h}{\partial t} \right\rangle, \quad (5.24)$$

$\langle j_{dir}(x, t) \rangle$ o fluxo de energia proveniente do oscilador ,

$$\begin{aligned} \langle j_{dir}(x, t) \rangle &= -\frac{\gamma}{2} \left\langle \frac{\partial \phi^P}{\partial t} \frac{\partial \phi^P}{\partial x} + \frac{\partial \phi^P}{\partial x} \frac{\partial \phi^P}{\partial t} \right\rangle \\ &= -\gamma \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \left\langle \left(\frac{\partial \phi^P}{\partial \tau} \right)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.25)$$

e $\langle j_{int}(x, t) \rangle$ o fluxo do termo de interferência

$$\begin{aligned} \langle j_{int}(x, t) \rangle &= -\frac{\gamma}{2} \left\langle \frac{\partial \phi^h}{\partial t} \frac{\partial \phi^P}{\partial x} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \frac{\partial \phi^P}{\partial t} + \frac{\partial \phi^P}{\partial x} \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \frac{\partial \phi^P}{\partial t} \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right\rangle \\ &= -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \left\langle \frac{\partial \phi^P}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi^P}{\partial \tau} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Utilizando (5.7) e (4.34), encontramos facilmente para (5.24) que

$$\langle j_0(x, t) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk k \coth(\beta \omega_{\mathbf{k}}) = 0, \quad (5.27)$$

onde usamos o fato que a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico é zero; para calcular (5.25) derivamos (5.14); tomando o valor médio, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right\rangle &= \frac{\gamma}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk d\omega_1 d\omega_2 \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_k} \times \\ &[(1 + f_B) \alpha(\omega_1) \alpha(\omega_2)^* c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} \\ &+ f_B \alpha(\omega_1)^* \alpha(\omega_2) c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\tau}]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Para o caso $T = 0$, utilizando a relação (5.17) resulta

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right\rangle &= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^3 |\alpha(\omega)|^2 \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega}}{\sinh(\frac{\pi}{\alpha}\omega)} \\ &= 2 \frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega (\omega)^3 |\alpha(\omega)|^2 \coth\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega\right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

e para o fluxo (5.25)

$$\langle j_{dir} \rangle = -\frac{2\gamma^2}{\pi} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \int_0^{\infty} d\omega (\omega)^3 |\alpha(\omega)|^2 \coth\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega\right). \quad (5.30)$$

Efetuada o cálculo de (5.25), após algumas manipulações, encontramos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dy(\tau)}{d\tau} \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right) \right\rangle &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^2 dk \frac{\omega - k}{\omega} \times \\ &[(1 + f_b) \alpha(\omega_1) c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} e^{i(\omega_k t - kx)} \\ &- f_b \alpha(\omega_1)^* c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} e^{-i(\omega_k t - kx)}], \end{aligned} \quad (5.31)$$

novamente, para $T = 0$, encontramos a relação²

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\omega - k}{\omega} c(k, \omega_1) e^{-i(\omega_1 \tau + kx - \omega t)} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} \omega_1}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha} \omega_1\right)}, \quad (5.32)$$

resultando

$$\left\langle \frac{dy(\tau)}{d\tau} \left(\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \frac{\partial \phi^h}{\partial x} \right) \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \tau}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^2 \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} \omega_1}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha} \omega_1\right)} \alpha(\omega_1), \quad (5.33)$$

Finalmente, para o fluxo (5.26)

$$\langle j_{int} \rangle = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^2 \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} \omega_1}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha} \omega_1\right)} [\alpha(\omega_1) - \alpha(\omega_1)^*], \quad (5.34)$$

observando que $\alpha(\omega_1) - \alpha(\omega_1)^* = i4\gamma\omega_1 |\alpha(\omega_1)|^2$, encontramos finalmente

$$\begin{aligned} \langle j_{int} \rangle &= \frac{\gamma^2}{\pi} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^2 \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} \omega}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha} \omega\right)} \left[\omega_1 |\alpha(\omega_1)|^2 \right] \\ &= 2 \frac{\gamma^2}{\pi} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \omega_1^3 |\alpha(\omega)|^2 \coth\left(\frac{\pi}{\alpha} \omega\right). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Comparado as expressões (5.30) e (5.34) vemos que são idênticas e, portanto, o fluxo total se anula,

$$\langle j(x, t) \rangle = 0. \quad (5.36)$$

²Tal demonstração se contra no apêndice E.3.

Conclui-se então que um sistema que sofre aceleração uniforme com respeito ao vácuo, a temperatura zero, não irradia. Naturalmente, o movimento hiperbólico é uma idealização, com a força sendo aplicada durante um tempo infinito. Um caso mais realista consistiria em supor que em algum tempo distante, mas finito, no passado, o oscilador é impulsivamente acelerado; nesse instante, deve existir uma troca de energia com o campo, mas não seria o que é chamada de radiação Unruh.

5.3 O MODELO FKM

O modelo de Ford, Kac e Mazur (FKM) (FORD; KAC; MAZUR, 1965) consiste de um sistema de $2N + 1$ osciladores acoplados, descritos pelo hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=-N}^N p_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=-N}^N q_i(t) A_{ij} q_j(t), \quad (5.37)$$

onde q_i e p_i são, respectivamente, a coordenada e o momento canônico do i -ésimo oscilador. A interação entre os osciladores é caracterizada pela matriz \mathbf{A} , cujos elementos são A_{ij} . Valendo-se das equações de Hamilton, $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ e $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$, escrevemos as equações de movimento para esse sistema na forma matricial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{p}(t), \\ \dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{A}\mathbf{q}(t), \end{cases} \quad (5.38)$$

onde \mathbf{p} , \mathbf{q} e são matrizes coluna de $2N + 1$ linhas. A solução formal dessas equações para os osciladores é

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = \cos\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}t\right) \mathbf{q}(0) + \mathbf{A}^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}t\right) \mathbf{p}(0), \\ \mathbf{p}(t) = -\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}t\right) \mathbf{q}(0) + \cos\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}t\right) \mathbf{p}(0), \end{cases} \quad (5.39)$$

com $\cos\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathbf{A}^n t^{2n}$. Consideremos que a partícula browniana é representada pelo oscilador de índice '0' e o banho térmico pelos $2N$ osciladores restantes. Assim, substituindo (5.39) em (5.38) encontramos $p_0(t)$ e $\dot{p}_0(t)$ para a partícula browniana,

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= \sum_j \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} p_j(0) - \sum_j \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} q_j(0) \\
&= \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} p_0(0) + \sum_{j \neq 0} \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} p_j(0) \\
&\quad - \sum_j \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} q_j(0),
\end{aligned} \tag{5.40}$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{p}_0(t) &= -\sum_j \left[\mathbf{A} \cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} q_j(0) - \sum_j \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} p_j(0) \\
&= \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} p_0(0) + \sum_{j \neq 0} \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} p_j(0) \\
&\quad - \sum_j \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} q_j(0).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Utilizando (5.40) para eliminar $p_0(0)$, resulta de (5.41)

$$\begin{aligned}
\dot{p}_0(t) &= -\frac{\left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}}{\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}} p_0(t) \\
&\quad - \sum_{j \neq 0} \left\{ \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} - \frac{\left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}}{\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}} \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} \right\} p_j(0) \\
&\quad - \sum_j \left\{ \left[\mathbf{A} \cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} + \frac{\left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}}{\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}} \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} \right\} q_j(0).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Comparando (5.42) com (5.1) observamos que

$$\gamma = \frac{\left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}}{\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}} = -\frac{d}{dt} \ln \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00}, \tag{5.43}$$

$$\therefore \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} = e^{-\gamma |t|} \quad (5.44)$$

e

$$\begin{aligned} F(t) = & - \sum_j \left\{ \left[\mathbf{A} \cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} + \gamma \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} \right\} q_j(0) \\ & - \sum_j \left\{ \left[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} - \gamma \left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{0j} \right\} p_j(0). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Supõe-se agora que no instante inicial, $t = 0$, o sistema esteja em equilíbrio térmico à temperatura T , isto é, $q_j(0)$ e $p_j(0)$ estão associados à distribuição canônica

$$D(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-(2N+1)} (\det \mathbf{A})^{\frac{1}{2}} e^{-\beta H(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))}. \quad (5.46)$$

O valor esperado de qualquer função $f(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ é dado por

$$\begin{aligned} \langle f \rangle = & \int \dots \int dq_{-N}(0) \dots dq_N(0) dp_{-N}(0) \dots dp_N(0) \times \\ & f(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)) D(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Deste modo, podemos calcular as funções de correlação

$$\begin{aligned} \langle q_j(0) q_i(0) \rangle &= \frac{[\mathbf{A}^{-1}]_{ji}}{\beta}, \\ \langle p_j(0) p_i(0) \rangle &= \frac{\delta_{ji}}{\beta}, \\ \langle q_j(0) p_i(0) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Com ajuda de (5.48) conseguimos calcular a função de correlação da força de Langevin $\langle F(t) F(t') \rangle$, de modo que

$$\langle F(t) F(t') \rangle = \frac{1}{\beta} \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (t - t') \right]_{00}, \quad (5.49)$$

portanto, igualando com (5.3) encontramos a relação

$$\therefore \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (t - t') \right]_{00} = 2\gamma\delta(t - t'). \quad (5.50)$$

5.3.1 A Matriz de Interação

Até o momento, foram assumidas algumas condições para a matriz de interação \mathbf{A} . De (5.46), temos que $\det \mathbf{A} \neq 0$ e em (5.49) foi imposto $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Portanto, em nosso modelo, resulta que os $2N+1$ osciladores são idênticos e que estão dispostos em uma cadeia com condições de contorno cíclicas. Isso significa que a matriz de interação é uma matriz simétrica, tal que os elementos possam ser escritos como

$$A_{mn} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \omega_k^2 e^{i \frac{2\pi}{2N+1} k(m-n)}, \quad (5.51)$$

onde a simetria de \mathbf{A} requer que

$$\omega_k^2 = \omega_{-k}^2. \quad (5.52)$$

Agora, levando em conta a equação de autovalores para a matriz de interação (5.67) e que $F(\mathbf{A})$ é uma função da matriz \mathbf{A} , resulta de (5.51)

$$[F(\mathbf{A})]_{mn} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N F(\omega_k^2) e^{i \frac{2\pi}{2N+1} k(m-n)}. \quad (5.53)$$

Consideremos agora a condição (5.44) para a matriz de interação. De (5.53),

$$\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \cos(\omega_k t). \quad (5.54)$$

No entanto, não existe ω_k tal que (5.44) seja satisfeita. Examinemos agora o limite $N \rightarrow \infty$, i.e, uma cadeia infinita. Fazendo a hipótese adicional de que ω_k^2 é uma função que varia lentamente com k , (5.51) pode ser escrita como

$$A_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta f(\eta) e^{i\eta(m-n)}, \quad (5.55)$$

onde definimos

$$\eta \equiv \frac{2\pi k}{2N+1}, \quad (5.56)$$

e

$$f(\eta) \equiv \frac{\omega_k^2}{\Delta k} \Big|_{k=(2N+1)\eta/2\pi}. \quad (5.57)$$

No limite do contínuo, a equação (5.54) torna-se

$$\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \cos \left[f(\eta)^{\frac{1}{2}} t \right], \quad (5.58)$$

e fazendo, convenientemente, a substituição

$$\omega \equiv f(\eta)^{\frac{1}{2}} = \gamma \tan \left(\frac{\eta}{2} \right), \quad (5.59)$$

com $d\omega = \frac{1}{2\gamma} (\gamma^2 + \omega^2) d\eta$, encontramos

$$\left[\cos \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} t \right) \right]_{00} = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\cos [\omega t]}{\gamma^2 + \omega^2} = e^{-\gamma|t|}. \quad (5.60)$$

Para a segunda condição 5.50 encontramos

$$\begin{aligned} \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (t - t') \right]_{00} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta [\gamma^2 + f(\eta)] \cos \left[f(\eta)^{\frac{1}{2}} (t - t') \right] \\ &= 2\gamma \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos [\omega (t - t')]}_{=\delta(t-t')} = 2\gamma \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Porém, se substituirmos (5.59) na expressão para os elementos da matriz \mathbf{A} (5.55), resulta que a integral

$$A_{mn} = \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\eta \tan^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) e^{i\eta(m-n)}, \quad (5.62)$$

é divergente. Para contornar esse fato e obtermos elementos finitos, é introduzido um corte a altas frequências tal que

$$A_{mn} = \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\eta \tan^2 \left(\frac{\eta}{2} \right) e^{i\eta(m-n)}. \quad (5.63)$$

Ressaltamos aqui a importância da escolha de uma escala tem-

poral adequada para a análise do fenômeno, unicamente dentro de um intervalo de tempo Δt , onde vale

$$\omega_c^{-1} \ll \Delta t \approx \gamma^{-1}, \quad (5.64)$$

lembrando que γ^{-1} é o tempo característico relacionado ao coeficiente de atrito e, portanto, um tempo de “resolução macroscópico”; com elementos finitos para a matriz de interação, o modelo se torna equivalente à equação de Langevin.

5.3.2 Osciladores Quânticos Acoplados

Passemos à questão das alterações necessárias para uma descrição quântica do modelo. A discussão das seções anteriores permanece totalmente inalterada; no entanto, as coordenadas q_j e momentos p_j são agora operadores, respeitando as relações de comutação canônicas

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (5.65)$$

$$[q_i, q_j] = 0 = [p_i, p_j].$$

As equações de movimento (5.38) são as equações de movimento na representação de Heisenberg, e suas soluções (5.39) relacionam os operadores de Heisenberg em um dado tempo t àqueles no instante inicial. Expandimos os operadores $\mathbf{q}(0)$ e $\mathbf{p}(0)$ em termos dos operadores para os modos normais

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \mathbf{v}^k [a_k - a_k^\dagger], \\ \mathbf{p}(0) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} \mathbf{v}^k [a_k + a_k^\dagger], \end{cases} \quad (5.66)$$

onde \mathbf{v}^k é o autovetor da matriz de interação e ω_k^2 é o seu autovalor associado,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^k = \omega_k^2 \mathbf{v}^k. \quad (5.67)$$

Substituindo (5.66) no Hamiltoniano (5.37) e utilizando as relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_j^k &= \delta_{ij}, \\ \sum_i \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_i^s &= \delta_{ks},\end{aligned}\tag{5.68}$$

encontramos

$$H = \sum_k \hbar \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right).\tag{5.69}$$

Pode-se mostrar que a energia de ponto zero não interfere na expressão (4.30) para $|0_{(\beta)}\rangle$, de modo que, imediatamente, temos $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ como sendo a distribuição de Bose-Einstein (4.34). Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{q}(0) \mathbf{q}(0) \rangle &= \frac{\hbar}{2\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right), \\ \langle \mathbf{p}(0) \mathbf{p}(0) \rangle &= \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right), \\ \langle \mathbf{q}(0) \mathbf{p}(0) \rangle &= \frac{i\hbar}{2}.\end{aligned}\tag{5.70}$$

Calculando a função de correlação da força de Langevin para o caso quântico, resulta

$$\begin{aligned}&\langle F(t) F(t') \rangle \\ &= \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (t - t') - i \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (t - t') \right] \right]_{00}.\end{aligned}\tag{5.71}$$

No limite clássico recuperamos as expressões (5.48) e (5.49). Utilizando a substituição (5.59) da seção anterior, encontramos

$$\begin{aligned}&\langle F(t) F(t') \rangle \\ &= \frac{\gamma \hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \left\{ \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \cos [\omega (t - t')] - i \sin [\omega (t - t')] \right\};\end{aligned}\tag{5.72}$$

que apresenta a mesma forma funcional de (5.18).

5.3.3 Osciladores Quânticos Acelerados

Consideremos o caso no qual os $2N+1$ osciladores são acelerados. Para isto, assumiremos que os osciladores se encontram no *wedge* R e, portanto, procederemos como discutido na seção (4.1.2). Assim, as equações (5.66) se tornam

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{q}}(0) = i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} \mathbf{v}^k \left[\bar{a}_k^R - \bar{a}_k^{R\dagger} \right], \\ \bar{\mathbf{p}}(0) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} \mathbf{v}^k \left[\bar{a}_k^R + \bar{a}_k^{R\dagger} \right], \end{cases} \quad (5.73)$$

resultando nas correlações

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{q}}(0) \rangle &= i^2 \hbar \sum_{k,l} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_l}} \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \left[\langle \bar{a}_k^R \bar{a}_l^R \rangle - \langle \bar{a}_k^{R\dagger} \bar{a}_l^R \rangle - \frac{\delta_{kl}}{2} \right], \\ \langle \bar{\mathbf{p}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle &= \hbar \sum_{k,l} \sqrt{\omega_k \omega_l} \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \left[\langle \bar{a}_k^R \bar{a}_l^R \rangle + \langle \bar{a}_k^{R\dagger} \bar{a}_l^R \rangle + \frac{\delta_{kl}}{2} \right], \\ \langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle &= \frac{i\hbar}{2}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde utilizamos as relações $[\bar{a}_k^R, \bar{a}_l^{R\dagger}] = \delta_{kl}$ e $\langle \bar{a}_k^R \bar{a}_l^R \rangle = \langle \bar{a}_k^{R\dagger} \bar{a}_l^{R\dagger} \rangle$. A seguir, consideraremos os mapeamentos apresentados na seção (4.1.2). Para o primeiro mapeamento substituímos (4.44) e (4.45) em (5.74), resultando

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{q}}(0) \rangle_1 &= \frac{\hbar}{2\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \left[\coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) + \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \right], \\ \langle \bar{\mathbf{p}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle_1 &= \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \left[\coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) - \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \right], \\ \langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle_1 &= \frac{i\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Calculando a função de correlação da força de Langevin, obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_1 \\
&= \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau') \right]_{00} \\
&+ \left[(\mathbf{A} - \gamma^2) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') \right]_{00} \\
&+ \left[\gamma \hbar \mathbf{A} \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \left\{ \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') \right\} \right]_{00} \\
&- \left[i (\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau') \right]_{00}, \tag{5.76}
\end{aligned}$$

onde adicionamos o subíndice em $\langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_1$ para indicar o primeiro mapeamento. Para o segundo, substituído (4.51) e (4.52) em (5.74), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{q}}(0) \rangle_2 &= \frac{\hbar}{2\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) - \operatorname{csch} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \right], \\
\langle \bar{\mathbf{p}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle_2 &= \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \left[\coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) + \operatorname{csch} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \right], \\
\langle \bar{\mathbf{q}}(0) \bar{\mathbf{p}}(0) \rangle_2 &= \frac{i\hbar}{2}. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Neste caso, a função de correlação da força de Langevin é dada por

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_2 \\
&= \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \coth \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau') \right]_{00} \\
&- \left[(\mathbf{A} - \gamma^2) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \operatorname{csch} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') \right]_{00} \tag{5.78} \\
&- \left[\gamma \hbar \mathbf{A} \operatorname{csch} \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') \right]_{00} \\
&- \left[i (\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau') \right]_{00}.
\end{aligned}$$

Observamos que a única diferença entre $\langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_1$ e $\langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_2$ encontra-se no segundo termo, onde o primeiro mapeamento é proporcional a $+\coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right)$ e o segundo a $-\csch\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right)$. Assim, no limite $a \rightarrow 0$, as equações (5.76) e (5.78) retornam a (5.71), indicando que o caso inercial pode ser recuperado a partir do acelerado embora não haja nenhuma informação adicional relacionando os mapeamentos. No entanto, para uma dada aceleração, no limite para baixas temperaturas, $\beta \rightarrow \infty$, encontramos

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_1 \\
&= \left[\frac{\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} (\gamma^2 + \mathbf{A}) \coth\left(\frac{\pi}{a}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right) \cos\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau - \tau') \right]_{00} \\
&+ \left[(\mathbf{A} - \gamma^2) \frac{\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \csch\left(\frac{\pi}{a}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right) \cos\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau + \tau') \right]_{00} \\
&+ \left[\gamma\hbar\mathbf{A} \csch\left(\frac{\pi}{a}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right) \sin\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau + \tau') \right]_{00} \\
&- \left[i\frac{\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} (\gamma^2 + \mathbf{A}) \sin\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau - \tau') \right]_{00}, \tag{5.79}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_2 \\
&= \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \frac{\hbar\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}}{2} \left\{ \coth\left(\frac{\pi}{a}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right) \cos\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau - \tau') - i \sin\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(\tau - \tau') \right\} \right]_{00}. \tag{5.80}
\end{aligned}$$

Novamente, efetuando a substituição (5.59) em (5.80), encontramos

$$\begin{aligned}
& \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_2 \\
&= \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \left\{ \coth\left(\frac{\pi}{a}\omega\right) \cos[\omega(\tau - \tau')] - i \sin[\omega(\tau - \tau')] \right\}, \tag{5.81}
\end{aligned}$$

que é exatamente a expressão (5.18). Podemos concluir, finalmente, que o segundo mapeamento, $\{b_{\mathbf{k}}^R \rightarrow a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^L \rightarrow \tilde{a}_{\mathbf{k}}\}$, representa o comportamento físico do sistema. Dado que o primeiro mapeamento não

descreve corretamente a física em questão, não iremos mais considerá-lo a partir deste ponto. Da mesma maneira, observamos que, pelo menos a baixas temperaturas, os modelos FKM e o do oscilador com acoplamento são equivalentes. Nota-se que as funções de correlação quânticas para $\{a = 0, T \neq 0\}$ (5.71) e $\{a \neq 0, T = 0\}$ (5.80) exibem a mesma forma funcional, sendo possível chegar a uma delas a partir da outra através da correspondência $\frac{\pi}{a} \leftrightarrow \frac{1}{2}\beta\hbar$.

Por último, no limite clássico encontramos

$$\begin{aligned} \langle \bar{F}(\tau) \bar{F}(\tau') \rangle_2 &= \frac{1}{\beta} \left[(\gamma^2 + \mathbf{A}) \coth \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau - \tau') \right]_{00} \\ &- \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{csch} \left(\frac{\pi}{a} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right) \left\{ (\mathbf{A} - \gamma^2) \cos \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') + 2\gamma \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \sin \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (\tau + \tau') \right\} \right]_{00}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Percebemos que a expressão anterior é constituída pela correlação clássica ponderada por um termo que surge exclusivamente no caso acelerado.

6 EVOLUÇÃO DE UM SISTEMA DE DOIS NÍVEIS.

Na seção 6.1 estudaremos a evolução de um sistema de dois níveis, derivando uma equação para descrever sua evolução. Identificamos as contribuições da *flutuação do vácuo* e da *reação de radiação* para este sistema e, finalmente, aplicamos as parametrizações vistas em 2.1 para Minkowski e Rindler. Na seção 6.2, voltaremos nossa atenção ao estudo da evolução dinâmica de um sistema de partículas e derivaremos uma equação de operadores para descrever esta evolução. Finalmente, aplicaremos o formalismo desenvolvido para o sistema de dois níveis visto na seção 6.1.

6.1 O MODELO DE AUDRETSCH-MÜLLER

Consideremos novamente o campo escalar não massivo, descrito pelo hamiltoniano (2.40). Esse campo é acoplado a um sistema atômico de dois níveis descrito pelo hamiltoniano

$$H_A = \omega_0 R_3(\tau), \quad (6.1)$$

onde $R_3 = \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| - \frac{1}{2} |-\rangle \langle -|$ e τ é o tempo próprio do átomo, cujos autovalores são

$$\begin{aligned} H_A |+\rangle &= \frac{1}{2} \omega_0 |+\rangle, \\ H_A |-\rangle &= -\frac{1}{2} \omega_0 |-\rangle. \end{aligned} \quad (6.2)$$

A interação proposta entre o átomo e o campo é semelhante a (3.1) e dada pelo hamiltoniano

$$H_I = \mu R_2(\tau) \phi(\tau), \quad (6.3)$$

sendo μ a constante de acoplamento e $R_2 = \frac{i}{2} (R_- - R_+)$, com $R_+ = \frac{i}{2} |+\rangle \langle -|$ e $R_- = \frac{i}{2} |-\rangle \langle +|$. Ressalta-se que os operadores R_+ e R_- podem ser vistos como operadores de levantamento e abaixamento do sistema atômico e, em conjunto com R_3 , geram a álgebra $SO(3)$,

$$[R_+, R_-] = 2R_3, \quad (6.4)$$

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}. \quad (6.5)$$

A equação responsável por descrever a evolução dos operadores surge dos parênteses de Poisson que, ao serem quantizados, dão origem à equação de Heisenberg

$$i \frac{d}{dt} A(t) = [A(t), H_T]. \quad (6.6)$$

Salienta-se que a equação (6.6) escrita desta forma possui validade assegurada apenas para Minkowski, sendo incerta para qualquer outro sistema de coordenadas não inercial, como é o caso de Rindler. Deste modo, é necessário que os referenciais sejam inerciais. Dado o Hamiltoniano total $H_T = H_A + H_F + H_I$, de (6.6) encontra-se as equações de evolução

$$\frac{d}{d\tau} R_{\pm}(\tau) = \pm i\omega_0 R_{\pm}(\tau) + i\mu\phi(\tau) [R_2(\tau), R_{\pm}(\tau)], \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{d\tau} R_3(\tau) = i\mu\phi(\tau) [R_2(\tau), R_3(\tau)], \quad (6.8)$$

$$\frac{d}{dt} a_k(t) = -i\omega_k a_k(t) + i\mu R_2(\tau) [\phi(t, \mathbf{x}), a_k(t)]. \quad (6.9)$$

Resolvendo as equações (6.7), (6.8) e (6.9) até primeira ordem em μ , resulta ¹

$$R_{\pm}(\tau) = R_{\pm}(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau_0)} + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau)], \quad (6.10)$$

$$R_3(\tau) = R_3(\tau_0) + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') [R_2(\tau'), R_3(\tau)], \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} a_k(t(\tau)) &= a_k(t(\tau_0)) e^{-i\omega_k(t(\tau)-t(\tau_0))} \\ &+ i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' R_2(\tau') [\phi(\tau'), a_k(t(\tau))]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

¹As soluções das equações (6.7), (6.8) e (6.9) podem ser encontradas no apêndice F.

As equações (6.10), (6.11) e (6.12) podem ser convenientemente decompostas numa parte livre, que se preserva mesmo na ausência de acoplamento, e noutra parte resultante do acoplamento, a qual possui como assinatura a constante μ . Além disso, na aproximação até primeira ordem em μ , todos os operadores à direita do sinal de igualdade podem ser substituídos por suas partes livre, de modo que

$$R_{\pm}^f(\tau) = R_{\pm}^f(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau - \tau_0)}, \quad (6.13)$$

$$R_{\pm}^S(\tau) = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \left[R_2^f(\tau'), R_{\pm}^f(\tau) \right], \quad (6.14)$$

$$R_3^f(\tau) = R_3(\tau_0), \quad (6.15)$$

$$R_3^S(\tau) = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \left[R_2^f(\tau'), R_3^f(\tau) \right], \quad (6.16)$$

$$a_k^f(t(\tau)) = a_k^f(t(\tau_0)) e^{-i\omega_k(t(\tau) - t(\tau_0))}, \quad (6.17)$$

$$a_k^S(t(\tau)) = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' R_2^f(\tau') \left[\phi^f(\tau'), a_k^f(t(\tau)) \right]. \quad (6.18)$$

Por último, encontra-se facilmente a equação para o campo $\phi(\tau)$ substituindo (6.17) e (6.18) em (2.20), o qual, já decomposto, resulta

$$\phi^f(\tau) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (6.19)$$

$$\phi^S(\tau) = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' R_2^f(\tau') \left[\phi^f(\tau'), \phi^f(\tau) \right]. \quad (6.20)$$

O principal objetivo nesta seção, como foi dito, é identificar e analisar quantitativamente as contribuições provenientes das flutuações do vácuo e da reação de radiação. Assim, identifica-se que a parte livre

do campo (6.19) está relacionada às flutuações do vácuo e, consequentemente, a reação de radiação é causada pela parte de interação com o campo (6.20). A equação de movimento para um observável atômico A é dada por

$$\frac{d}{d\tau}A(\tau) = i[H_A(\tau), A(\tau)] + i[H_I(\tau), A(\tau)]. \quad (6.21)$$

No caso em que este observável é a própria energia do átomo $H_A(\tau)$, resulta

$$\frac{d}{d\tau}H_A(\tau) = i[H_I(\tau), H_A(\tau)] = i\mu\omega_0\phi(\tau)[R_2(\tau), R_3(\tau)]. \quad (6.22)$$

Reescrevendo o comutador de (6.22) em termos das partes livres e de interação de $R_2(\tau)$ e $R_3(\tau)$, encontra-se

$$\begin{aligned} [R_2(\tau), R_3(\tau)] &= [R_2^f(\tau), R_3^f(\tau)] + [R_2^f(\tau), R_3^S(\tau)] \\ &+ [R_2^S(\tau), R_3^f(\tau)] + [R_2^S(\tau), R_3^S(\tau)]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Substituindo as equações (6.14), (6.16) nos comutadores acima e, recorrendo à linearidade de R_2 e R_\pm , resulta

$$[R_2^f(\tau), R_3^S(\tau)] = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') [R_2^f(\tau), [R_2^f(\tau'), R_3^f(\tau')]], \quad (6.24)$$

$$[R_2^S(\tau), R_3^f(\tau)] = i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') [[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau)], R_3^f(\tau)]. \quad (6.25)$$

Somando (6.24), (6.25) com ajuda da identidade de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0, \quad (6.26)$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left[R_2^f(\tau), R_3^S(\tau) \right] + \left[R_2^S(\tau), R_3^f(\tau) \right] \\
&= i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \left[R_2^f(\tau), \left[R_2^f(\tau'), R_3^f(\tau) \right] \right] \\
&+ i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \left[R_3^f(\tau), \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right] \\
&= i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \left[R_2^f(\tau'), \left[R_2^f(\tau), R_3^f(\tau) \right] \right].
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Substituindo a equação de Heisenberg para $R_2^f(\tau)$

$$\frac{i}{\omega_0} \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) = \left[R_2^f(\tau), R_3^f(\tau) \right], \tag{6.28}$$

resulta para o comutador (6.23)

$$[R_2(\tau), R_3(\tau)] = \frac{i}{\omega_0} \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) - \frac{\mu}{\omega_0} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \frac{d}{d\tau} \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right], \tag{6.29}$$

de modo que a evolução de $H_A(\tau)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} H_A(\tau) &= -\mu \phi(\tau) \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) \\
&- i\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau) \phi^f(\tau') \frac{d}{d\tau} \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right],
\end{aligned} \tag{6.30}$$

onde foi eliminando o termo $i\mu\omega_0\phi(\tau) [R_2^S(\tau), R_3^S(\tau)]$ proporcional a μ^3 . A energia $H_A(\tau)$ é um observável físico e, como tal, representada por um operador hermitiano. Deseja-se dividir a variação total $\frac{d}{d\tau} H_A(\tau)$ em duas contribuições distintas associadas a dois processos físicos. Deste modo, impõe-se que essas possuam significados físicos distintos e, conseqüentemente, sejam representadas por operadores hermitianos. Para que esta condição seja válida é necessário efetuar o ordenamento dos operadores presentes em (6.30). Assim, como existe na teoria quântica uma indeterminação quanto ao ordenamento de operadores, consideramos o produto $\lambda AB + (1 - \lambda) BA$. Separando o campo $\phi(\tau)$ na sua parte livre $\phi^f(\tau)$ e de interação $\phi^S(\tau)$, resulta para a flutuação do vácuo

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right)_{VF} \\
&= -\lambda \mu \phi^f(\tau) \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) - (1-\lambda) \mu \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) \phi^f(\tau) \\
&\quad - \lambda i \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau) \phi^f(\tau') \frac{d}{d\tau} \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right] \\
&\quad - (1-\lambda) i \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi^f(\tau') \phi^f(\tau) \frac{d}{d\tau} \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right].
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Eliminando o termo em μ^2 de (6.30) dado que $\phi^S(\tau)$ é proporcional a μ , resulta para a reação de radiação

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right)_{RR} \\
&= -\lambda \mu \phi^S(\tau) \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) - (1-\lambda) \mu \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) \phi^S(\tau) \\
&\quad = -i \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [\phi^f(\tau'), \phi^f(\tau)] \times \\
&\quad \left[\lambda R_2^f(\tau') \frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) + (1-\lambda) \left(\frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau) \right) R_2^f(\tau') \right].
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Tomando o valor esperado no vácuo do campo $|0\rangle$ eliminamos todos os termos lineares em $\phi(\tau)$,

$$\langle 0 | \phi^f(\tau) | 0 \rangle = 0, \tag{6.33}$$

resultando para a flutuação do vácuo

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) | 0 \rangle_{VF} &= -i \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{d}{d\tau} \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right] \times \\
&\quad \langle 0 | \lambda \phi^f(\tau) \phi^f(\tau') + (1-\lambda) \phi^f(\tau') \phi^f(\tau) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{6.34}$$

e para a reação de radiação

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) | 0 \rangle_{RR} &= i \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')] | 0 \rangle \times \\
&\quad \frac{d}{d\tau} \left[\lambda R_2^f(\tau') R_2^f(\tau) + (1-\lambda) R_2^f(\tau) R_2^f(\tau') \right].
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Nas equações (6.34) e (6.35) é possível fatorar a derivada, uma vez que $\frac{d}{d\tau} R_2^f(\tau') = 0$. Por outro lado, como estas equações ainda são operatoriais em R , podemos tomar seu valor esperado em um estado atômico $|a\rangle$, dado por $|+\rangle$ ou $|-\rangle$; definida a notação contraída $\langle a | \otimes \langle 0 | \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) | 0 \rangle \otimes | a \rangle \equiv \langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \rangle$, resulta

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = i\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{d}{d\tau} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle \times \quad (6.36)$$

$$\langle 0 | \lambda \phi^f(\tau) \phi^f(\tau') + (1 - \lambda) \phi^f(\tau') \phi^f(\tau) | 0 \rangle,$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = i\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')] | 0 \rangle \times \quad (6.37)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\langle a \left| \lambda R_2^f(\tau') R_2^f(\tau) + (1 - \lambda) R_2^f(\tau) R_2^f(\tau') \right| a \right\rangle.$$

Com ajuda da relação ² $\lambda AB + (1 - \lambda) BA = (\lambda - \frac{1}{2}) [A, B] + \frac{1}{2} [A, B]_+$, encontra-se

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = i\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{d}{d\tau} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle \times \quad (6.38)$$

$$\left\langle 0 \left| \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')] + \frac{1}{2} [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')]_+ \right| 0 \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = i\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \langle 0 | [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')] | 0 \rangle \times \quad (6.39)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left\langle a \left| \frac{1}{2} \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right]_+ - \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle.$$

Nas equações (6.38) e (6.39) podemos reconhecer as funções normalmente conhecidas em óptica quântica como função de correlação $C(\tau, \tau')$ e susceptibilidade linear $\chi(\tau, \tau')$. Para o campo as funções de correlação e susceptibilidade são

$$C^F(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \left\langle 0 \left| [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')]_+ \right| 0 \right\rangle, \quad (6.40)$$

²Onde $[A, B]_+ = AB + BA$ é o anticomutador.

$$\chi^F(\tau, \tau') = \frac{1}{2i} \langle 0 | [\phi^f(\tau), \phi^f(\tau')] | 0 \rangle, \quad (6.41)$$

e para o sistema atômico

$$C^A(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right]_+ \right| a \right\rangle, \quad (6.42)$$

$$\chi^A(\tau, \tau') = \frac{1}{2i} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle. \quad (6.43)$$

Nota-se que as funções estão definidas de tal maneira que sejam hermitianas, correspondendo, portanto, a observáveis físicos. A partir das relações de comutação (6.4) e (6.5), e da evolução para a parte livre de R_\pm (6.13), podemos calcular explicitamente a função (6.43) para a susceptibilidade. Assim

$$\begin{aligned} \chi^A(\tau, \tau') &= \frac{1}{2i} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Para calcular a função de correlação (6.42) é necessário a álgebra de anticomutação dos operadores R_\pm , que pode ser deduzida da própria definição de R_\pm , resultando em

$$[R_\pm, R_\pm]_+ = 0, \quad (6.45)$$

$$[R_\pm, R_\mp]_+ = 1, \quad (6.46)$$

de modo que, para a função de correlação (6.42),

$$\begin{aligned} C^A(\tau, \tau') &= \frac{1}{2} \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right]_+ \right| a \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \cos(\omega_0(\tau - \tau')). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Substituindo as funções de correlação e susceptibilidade para o campo e para o sistema atômico em (6.38) e (6.39), resulta para a flutuação no vácuo e reação de radiação

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} \\
&= -2\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{d}{d\tau} \chi^A(\tau, \tau') \left[i(2\lambda - 1) \chi^F(\tau, \tau') + C^F(\tau, \tau') \right] \\
&= -\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \frac{d}{d\tau} \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle \times \\
&\quad \left[i(2\lambda - 1) \chi^F(\tau, \tau') + C^F(\tau, \tau') \right],
\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = -2\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \chi^F(\tau, \tau') \times \\
&\quad \frac{d}{d\tau} \left[C^A(\tau, \tau') - i(2\lambda - 1) \chi^A(\tau, \tau') \right] \\
&= -2\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \chi^F(\tau, \tau') \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{4} \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \right] \\
&+ 2i\mu^2 \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \chi^F(\tau, \tau') \frac{d}{d\tau} \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Finalmente, efetuando a derivada, encontramos para a flutuação do vácuo

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = -\omega_0 \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \times \\
&\quad \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle \left[i(2\lambda - 1) \chi^F(\tau, \tau') + C^F(\tau, \tau') \right]
\end{aligned} \tag{6.50}$$

e para a reação de radiação

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = \omega_0 \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \chi^F(\tau, \tau') \times \\
&\quad \left[\frac{1}{2} \sin(\omega_0(\tau - \tau')) + i(2\lambda - 1) \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \right] \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

As equações (6.50) e (6.51) são as equações que regem a flutuação do vácuo e a reação de radiação de forma geral; para ir além, devemos definir uma parametrização. No entanto, recorrendo a função de Wightman³ (3.17) apresentada na seção 3.1, encontramos para a correlação do campo (6.40) e para a susceptibilidade (6.41)

³Para maior detalhes ver apêndice B .

$$C^F(\tau, \tau') = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{1}{[|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t - i\epsilon)^2]} + \frac{1}{[|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t + i\epsilon)^2]} \right], \quad (6.52)$$

$$\chi^F(\tau, \tau') = \frac{1}{8\pi^2 i} \left[\frac{1}{[|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t - i\epsilon)^2]} - \frac{1}{[|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t + i\epsilon)^2]} \right]. \quad (6.53)$$

Por inspeção, das equações (6.50) e (6.51) notamos que, para determinar a flutuação do vácuo e a reação de radiação, deve-se resolver as integrais

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) C^F(\tau, \tau'), \quad (6.54)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \chi^F(\tau, \tau'), \quad (6.55)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \chi^F(\tau, \tau'). \quad (6.56)$$

As integrais acima, como discutido na seção 3, são divergentes; assim, consideramos novamente o estudo ao caso assintótico, $\tau_0 \rightarrow -\infty$. Na sequência, serão encontradas a flutuação do vácuo e a reação de radiação para as mesmas parametrizações vistas na anteriormente 3.1.1.

6.1.1 Referenciais Inercial e Acelerado

No caso do referencial inercial, o sistema atômico se move com velocidade constante v percorrendo a trajetória dada por

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \gamma\tau, \\ \mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{x}_0 + v\gamma\tau, \end{aligned} \quad (6.57)$$

de onde segue que

$$|\Delta \mathbf{x}|^2 - (\Delta t \pm i\epsilon)^2 = -(\Delta \tau \pm i\epsilon')^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.58)$$

Assim, a função de correlação (6.52) e a susceptibilidade (6.53) resultam

$$C^F(\tau, \tau') = -\frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon')^2} + \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon')^2} \right], \quad (6.59)$$

$$\chi^F(\tau, \tau') = -\frac{1}{8\pi^2 i} \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon')^2} - \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon')^2} \right]. \quad (6.60)$$

De (6.59), (6.60), (6.54) e (6.55), com a troca de variáveis $u = \tau - \tau'$, obtém-se^{4 5}

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) C^F(u) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^2} + \frac{1}{(u + i\epsilon')^2} \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^\infty du \left[\frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u - i\epsilon')^2} + \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^2} \right] = \frac{\omega_0}{8\pi}, \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \chi^F(u) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 i} \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^2} - \frac{1}{(u + i\epsilon')^2} \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^\infty du \left[\frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u - i\epsilon')^2} - \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^2} \right] = -\frac{\omega_0}{8\pi}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

No entanto, a integral

⁴O cálculo destas integrais pode ser encontrado no apêndice C.

⁵Lembrando que, ao assumir $\tau_0 \rightarrow -\infty$, as condições de contorno garantem que os operadores em (6.10), (6.11) e (6.12) atuam assintoticamente como operadores livres.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \chi^F(u) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 i} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u-i\epsilon')^2} - \frac{1}{(u+i\epsilon')^2} \right],
\end{aligned} \tag{6.63}$$

é logaritmicamente divergente. Retomando as equações de flutuação do vácuo (6.50) e reação de radiação, (6.51), resulta

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} \\
&= -\omega_0 \mu^2 \langle a | R_3 | a \rangle \left[\frac{\omega_0}{8\pi} + i(2\lambda - 1) \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \chi^F(u) \right],
\end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} \\
&= \omega_0 \mu^2 \left[-\frac{\omega_0}{16\pi} + i(2\lambda - 1) \langle a | R_3 | a \rangle \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \chi^F(u) \right].
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Das equações (6.64) e (6.65) podemos concluir dois fatos importantes. Para os que observáveis físicos associados à flutuação do vácuo e à reação de radiação sejam independentes e representados por quantidades finitas é necessário realizar o ordenamento dos operadores. Além disso, resulta que o único ordenamento possível para taxas não divergentes é o simétrico, $\lambda = \frac{1}{2}$. Assim, para o caso simétrico,

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \langle a | R_3 | a \rangle, \tag{6.66}$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi}. \tag{6.67}$$

De (6.67), concluímos que a reação de radiação é responsável por ceder energia para o campo e possui um carácter puramente dissipativo, independentemente de μ e ω_0 serem positivos ou negativos. Para melhor interpretar a flutuação do vácuo (6.66), substituímos R_3 :

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi} \left[|\langle a | + \rangle|^2 - |\langle a | - \rangle|^2 \right]. \tag{6.68}$$

Assim, no caso em que $|a\rangle = |+\rangle$, i.e. o átomo está no estado

excitado, resulta

$$\left\langle + \left| \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right| + \right\rangle_{VF} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi} \quad (6.69)$$

e, como esperado, a flutuação do vácuo é responsável por ceder energia. No caso $|a\rangle = |-\rangle$, equivalente ao estado fundamental,

$$\left\langle - \left| \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right| - \right\rangle_{VF} = \frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi} \quad (6.70)$$

e a flutuação do vácuo é responsável por excitar o átomo. Nota-se que, em média, as flutuações do vácuo causam uma variação de energia zero, resultado já esperado, uma vez que está relacionado com a parte livre do campo e assim ocorrendo independentemente da interação. Logo, não é inusitado esperar que a variação media por este causada seja zero. Retornando às equações (6.64) e (6.65), reparamos que ao somar ambas

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_T = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \left[\frac{1}{2} + \langle a | R_3 | a \rangle \right]. \quad (6.71)$$

A equação (6.71) não apresenta dependência do parâmetro λ , isto é, para o processo físico total qualquer ordenamento, inclusive o não ordenamento, resulta na mesma variação da energia (TOMAZELLI; COSTA, 2003). Por último, combinando os resultados, obtêm-se

$$\left\langle + \left| \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right| + \right\rangle_T = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi}, \quad (6.72)$$

$$\left\langle - \left| \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right| - \right\rangle_T = 0, \quad (6.73)$$

ou seja, o sistema atômico decai ao estado fundamental e nele permanece indefinidamente.

Consideramos agora o caso do sistema atômico uniformemente acelerado; lembrando, isto equivale a uma linha de mundo hiperbólica, que possui parametrização

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau), \\ t(\tau) &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Para construir as funções de correlação (6.52) e susceptibilidade (6.53) utiliza-se (3.26) deduzida na seção 3,

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(x') | 0 \rangle = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left((\tau - \tau') - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n \right)^{-2}, \quad (6.75)$$

de onde se extrai a função de correlação (6.52) e a susceptibilidade (6.53) para o caso acelerado

$$C^F(\tau, \tau') = -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} + \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} \right], \quad (6.76)$$

$$\chi^F(\tau, \tau') = -\frac{1}{8\pi^2 i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} - \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} \right]. \quad (6.77)$$

Novamente, calculamos as integrais (6.54) e (6.55), resultando

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) C^F(u) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} + \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\frac{e^{-i\omega_0 u}}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} + \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha} n)^2} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{8\pi} \left[\frac{2}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}}} - 1 \right] = \frac{\omega_0}{8\pi} \left[1 + \frac{2}{e^{-\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1} \right], \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \chi^F(u) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} - \frac{1}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} \right] \\
&= -\frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \left[\frac{e^{-i\omega_0 u}}{(\Delta\tau - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} - \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(\Delta\tau + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} \right] \\
&= -\frac{\omega_0}{8\pi} \left[\frac{2}{1 - e^{-\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}}} - 1 \right] = -\frac{\omega_0}{8\pi} \left[1 + \frac{2}{e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1} \right]. \tag{6.79}
\end{aligned}$$

A integral (6.56), assim como no espaço-tempo de Minkowski, é divergente,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \chi^F(u) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} - \frac{1}{(u + i\epsilon 2 + i\frac{2\pi}{\alpha}n)^2} \right], \tag{6.80}
\end{aligned}$$

e, como foi visto, eliminada escolhendo $\lambda = \frac{1}{2}$. Comparando os resultados (6.61), (6.62), (6.78) e (6.79), observamos que no caso acelerado, as taxas de variação podem ser decompostas em um termo inercial e no termo $\left[e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1 \right]^{-1}$, devido a aceleração. Portanto, toda a interpretação a respeito das variações da energia para o caso inercial segue válida no caso acelerado. Assim, a flutuação do vácuo e reação de radiação no referencial acelerado escrevem-se

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \langle a | R_3 | a \rangle \left[1 + \frac{2}{e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1} \right], \tag{6.81}$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi} \left[1 + \frac{2}{e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1} \right], \tag{6.82}$$

e, para a variação total,

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_T = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \left[\frac{1}{2} + \langle a | R_3 | a \rangle \right] \left[1 + \frac{2}{e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}} - 1} \right]. \tag{6.83}$$

6.1.2 Acoplamento Derivativo

Assim como feito em (3.1.2), pode-se propor um acoplamento derivativo (TOMAZELLI; CUNHA, 2016). Neste caso, em lugar de (6.3), a nova interação é

$$H_I = \mu R_2(\tau) \frac{1}{\omega_0^n} \frac{d^n}{d\tau^n} \phi(\tau), \quad (6.84)$$

onde se introduziu a constante ω_0^n para garantir a dimensão correta. Com a interação (6.84), encontramos novas equações para a flutuação do vácuo e reação de radiação, equivalentes às equações (6.50) e (6.51),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} &= -\frac{\omega_0 \mu^2}{\omega_0^{2n}} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle \times \\ &\quad \left[i(2\lambda - 1) \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} \chi^F(\tau, \tau') + \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} C^F(\tau, \tau') \right], \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} &= \frac{\omega_0 \mu^2}{\omega_0^{2n}} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left[\frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} \chi^F(\tau, \tau') \right] \times \\ &\quad \left[\frac{1}{2} \sin(\omega_0(\tau - \tau')) + i(2\lambda - 1) \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Devemos escolher o ordenamento simétrico, $\lambda = \frac{1}{2}$, para eliminar as divergências. Para o caso inercial é necessário resolver as novas integrais equivalentes a (6.61) e (6.62):

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} C^F(\tau, \tau') \\ &= -\frac{(-1)^n}{8\pi^2} \int_0^{\infty} du \cos(\omega_0 u) \frac{d^{2n}}{du^{2n}} \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^2} + \frac{1}{(u + i\epsilon')^2} \right], \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} \chi^F(\tau, \tau') \\ &= -\frac{(-1)^n}{8\pi^2 i} \int_0^{\infty} du \sin(\omega_0 u) \frac{d^{2n}}{du^{2n}} \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^2} - \frac{1}{(u + i\epsilon')^2} \right], \end{aligned} \quad (6.88)$$

onde o termo $(-1)^n$ surge da mudança de variáveis $u = \tau - \tau'$. Uma

vez que a $2n$ -ésima derivada é

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{du^{2n}} \frac{1}{(u \pm i\epsilon')^2} &= \frac{d^{2n-1}}{du^{2n-1}} \frac{(-2)}{(u \pm i\epsilon')^3} \\ &= \frac{d^{2n-2}}{du^{2n-2}} \frac{(-2)(-3)}{(u \pm i\epsilon')^4} = \dots = \frac{(2n+1)!}{(u \pm i\epsilon')^{2n+2}}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Resulta, para (6.87)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} C^F(\tau, \tau') \\ &= -\frac{(-1)^n (2n+1)!}{8\pi^2} \int_0^{\infty} du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^{2n+2}} + \frac{1}{(u + i\epsilon')^{2n+2}} \right] \\ &= -\frac{(-1)^n (2n+1)!}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^{2n+2}} = \frac{i(-1)^n}{8\pi} (-i\omega_0)^{2n+1} = \frac{\omega_0^{2n+1}}{8\pi} \end{aligned} \quad (6.90)$$

e, para (6.88),

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \frac{d^n}{d\tau^n} \frac{d^n}{d\tau'^n} \chi^F(\tau, \tau') \\ &= -\frac{(-1)^n (2n+1)!}{8\pi^2 i} \int_0^{\infty} du \sin(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^{2n+2}} - \frac{1}{(u + i\epsilon')^{2n+2}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n (2n+1)!}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^{2n+2}} = -\frac{i(-1)^n}{8\pi} (-i\omega_0)^{2n+1} = -\frac{\omega_0^{2n+1}}{8\pi}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Dos resultados acima e de (6.85) e (6.86) recuperamos

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \langle a | R_3 | a \rangle, \quad (6.92)$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = -\frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi}. \quad (6.93)$$

Estes resultados são exatamente (6.66) e (6.67), obtidos para o caso não derivativo. O acoplamento derivativo para o caso de Rindler, assim como no espaço-tempo de Minkowski, resultará exatamente nos resultados encontrados anteriormente, (6.81) e (6.82). Deste modo, observamos que ambos os resultados são independentes da ordem do acoplamento, resultando sempre nas mesmas variações de energia.

6.2 A EQUAÇÃO MESTRA

Começaremos introduzindo nosso sistema e as restrições sobre o mesmo. Estudamos o caso de um pequeno sistema A em interação com um sistema R , considerado como um *reservoir*, o qual deve ser muito maior que A , de forma que não ocorram variações macroscópicas mensuráveis. Tais sistemas possuem a característica de apresentar duas escalas de tempo muito diferentes: τ_c , o tempo médio de uma flutuação em R e T_A , o tempo médio de uma variação do sistema A ; exigiremos que o acoplamento seja fraco na escala de τ_c , condição normalmente conhecida como *motional narrowing*.

O hamiltoniano do sistema $A + R$ na representação de Schrödinger será

$$H^S = H_A^S + H_R^S + V^S, \quad (6.94)$$

onde H_A^S é o hamiltoniano do sistema A , H_R^S o hamiltoniano do *reservoir* e V^S a interação entre estes. A equação responsável por descrever a evolução de um sistema em termos do operador densidade, na representação de Schrödinger, é a equação de von Neumann

$$\frac{d}{dt} \rho^S(t) = \frac{1}{i\hbar} [H^S, \rho^S(t)]. \quad (6.95)$$

Porém, é de maior interesse trabalhar na representação de interação de $H_A + H_R$; nesta, se a interação for suficientemente pequena, o operador densidade evoluirá mais lentamente. A representação de interação pode ser alcançada através da transformação unitária

$$U(t, t_0) = e^{\frac{-i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau (H_A + H_R)}. \quad (6.96)$$

Com $t_0 = 0$, a equação de von Neumann (6.95) na representação de interação torna-se

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [V(t), \rho(t)], \quad (6.97)$$

com

$$\rho(t) = U^{-1}(t) \rho^S(t) U(t), \quad (6.98)$$

$$V(t) = U^{-1}(t) V^S U(t). \quad (6.99)$$

Neste ponto, serão introduzidas certas considerações a respeito do sistema, as quais serão de utilidade na resolução da equação (6.97).

Como mencionado, o sistema é composto pelos subsistemas A e R ; no entanto, algumas vezes é conveniente observar apenas um dos subsistemas, ignorando a descrição detalhada do outro. Isto pode ser feito introduzindo os operadores densidade reduzidos

$$\sigma_A(t) \equiv Tr_R[\rho(t)], \quad (6.100)$$

$$\sigma_R(t) \equiv Tr_A[\rho(t)], \quad (6.101)$$

onde Tr_R e Tr_A representam os traços parciais com respeito a R e A , respectivamente. Assim, σ_A descreve completamente o subsistema A e σ_R , o subsistema R . Se os subsistemas estiverem fracamente acoplados, a perturbação ao longo do tempo que A causa em R , em primeira ordem, é muito pequena e pode ser desconsiderada,

$$\sigma_R(t) \simeq \sigma_R(0) \equiv \sigma_R. \quad (6.102)$$

A equação anterior equivale a dizer que o *reservoir* está em um estado estacionário e, portanto,

$$[H_R, \sigma_R] = 0. \quad (6.103)$$

O potencial de interação é separável, possuindo na representação de interação a forma

$$V(t) = -R(t) \otimes A(t). \quad (6.104)$$

O valor médio de R^S no subsistema R é, por definição, nulo

$$\langle R^S \rangle = Tr[\sigma_R R^S] = Tr[\sigma_R R(t)] = 0; \quad (6.105)$$

da equação acima deduz-se, utilizando a propriedade

$$Tr_A[A \otimes B] = B Tr[A], \quad (6.106)$$

que

$$Tr_R[\sigma_R V(t)] = Tr_R[\sigma_R (-R(t) \otimes A(t))] = -A(t) Tr[\sigma_R R(t)] = 0. \quad (6.107)$$

Devido ao sistema ser fracamente acoplado, na aproximação de *coarse-graining* (COHEN-TANNOUDJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1992), $\tau_c \ll \Delta t \ll T_A$, com τ_c , sendo o tempo médio de uma flutuação em R e T_A , o tempo médio de uma variação do sistema A ; é aceitável assumir

que o termo de correlação possa ser desprezado

$$\rho(t) = \sigma_A(t) \otimes \sigma_R(t) + \rho_{cor}(t) \simeq \sigma_A(t) \otimes \sigma_R. \quad (6.108)$$

A ideia por trás desta aproximação é que a correlação desaparece depois de um tempo da ordem de τ_c , contribuindo muito fracamente para evolução de σ_A no intervalo $[t, t + \Delta t]$. Dadas estas considerações, podemos resolver a equação diferencial (6.97). Integrando entre t e $t + \Delta t$, temos

$$\rho(t + \Delta t) - \rho(t) = -i \int_t^{t+\Delta t} dt' [V(t'), \rho(t')] \quad (6.109)$$

e, entre t e t' ,

$$\rho(t') - \rho(t) = -i \int_t^{t'} dt'' [V(t''), \rho(t'')]. \quad (6.110)$$

Substituindo (6.110) em (6.109) resulta

$$\begin{aligned} \rho(t + \Delta t) &= \rho(t) - i \int_t^{t+\Delta t} dt' [V(t'), \rho(t) - i \int_t^{t'} dt'' [V(t''), \rho(t'')]] \\ &= \rho(t) - i \int_t^{t+\Delta t} dt' [V(t'), \rho(t)] - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' [V(t'), [V(t''), \rho(t'')]]. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Tomando o traço parcial com respeito a R , obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_A(t) &= -i \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_R [V(t'), \rho(t)] \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [V(t'), [V(t''), \rho(t'')]], \end{aligned} \quad (6.112)$$

onde

$$\Delta\sigma_A(t) = Tr_R [\rho(t + \Delta t)] - Tr_R [\rho(t)]; \quad (6.113)$$

substituindo a aproximação (6.108) para $\rho(t)$ na equação (6.112), podemos então escrever

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_A(t) &\simeq -i \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_R [V(t'), \sigma_A(t) \otimes \sigma_R] \\ &\quad - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [V(t'), [V(t''), \sigma_A(t'') \otimes \sigma_R]]. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Comparando o primeiro termo à direita na equação anterior com

(6.107), nota-se que

$$Tr_R [V(t'), \sigma_A(t) \otimes \sigma_R] = 0, \quad (6.115)$$

fornecendo

$$\Delta \sigma_A(t) \simeq - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [V(t'), [V(t''), \sigma_A(t'') \otimes \sigma_R]]; \quad (6.116)$$

substituindo $V(t)$ pela expressão (6.104), segue que

$$\begin{aligned} & \Delta \sigma_A(t) \\ & \simeq - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [R(t') \otimes A(t'), [R(t'') \otimes A(t''), \sigma_A(t'') \otimes \sigma_R]]. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Expandindo o comutador acima e definindo a função $g(\tau)$

$$g(\tau) \equiv Tr [\sigma_R R(t') R(t'')], \quad (6.118)$$

a equação (6.117) assume a forma

$$\begin{aligned} & \Delta \sigma_A(t) \\ & \simeq - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' g(\tau) (A(t') A(t'') \sigma_A(t'') - A(t'') \sigma_A(t'') A(t')) \\ & - \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' g(-\tau) (\sigma_A(t'') A(t'') A(t') - A(t') \sigma_A(t'') A(t'')). \end{aligned} \quad (6.119)$$

A equação anterior representa a variação do subsistema A entre os instantes t e $t + \Delta t$; porém, estamos interessados em sua taxa de variação. Resgatando a aproximação de *coarse-graining*, $T_A \gg \Delta t \gg \tau_c$, pode-se considerar a taxa de variação $\frac{\Delta \sigma_A(t)}{\Delta t}$ como sendo a taxa instantânea $\frac{d\sigma_A(t)}{dt}$, e interpretá-la como a média da taxa instantânea. De fato

$$\frac{\Delta \sigma_A(t)}{\Delta t} = \frac{\sigma_A(t + \Delta t) - \sigma_A(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\sigma_A(t')}{dt'} dt'; \quad (6.120)$$

para tempos menores que Δt , a aproximação é responsável por suavizar as variações instantâneas. No entanto, caracteriza uma boa aproximação para tempos da ordem de T_R , de modo que a taxa de variação *coarse-graining* resulta

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta \sigma_A(t)}{\Delta t} \\
& \simeq -\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' g(\tau) (A(t') A(t'') \sigma_A(t'') - A(t'') \sigma_A(t'') A(t')) \\
& -\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' g(-\tau) (\sigma_A(t'') A(t'') A(t') - A(t') \sigma_A(t'') A(t'')) .
\end{aligned} \tag{6.121}$$

6.2.1 A Equação Mestra para um Sistema de Dois Níveis

Para prosseguir e integrar a equação (6.121), é necessário saber a forma de $\sigma_A(t'')$. Porém, na aproximação de *coarse-graining*, pode-se substituir $\sigma_A(t'')$ por $\sigma_A(t)$; a validade de tal aproximação será discutida no apêndice H. Ao compararmos a interação (6.104) com (6.3) estabelecemos as correspondências

$$\begin{cases} t \rightarrow \tau, \\ A(t) \rightarrow R_2(\tau), \\ R(t) \rightarrow \phi(\tau), \end{cases} \tag{6.122}$$

de modo que é possível aplicar a equação mestra ao caso estudado na seção 6.1. A seguir, a equação (6.121) é projetada na base de autoestados do sistema atômico; assim, tomando o valor esperado da equação (6.121) em um estado arbitrário $|a\rangle$ do sistema atômico e definida a notação contraída

$$\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau) \equiv \langle a | \Delta \sigma_A(\tau) | a \rangle, \tag{6.123}$$

onde interpretamos $\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau)$ como sendo população do estado $|a\rangle$, de modo que a equação (6.121) se torna

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau)}{\Delta \tau} \simeq -\frac{1}{\Delta \tau} \int_\tau^{\tau+\Delta \tau} d\tau' \int_\tau^{\tau'} d\tau'' g(\tau', \tau'') \times \\
& \langle a | (R_2(\tau') R_2(\tau'') \sigma_A(\tau) - R_2(\tau'') \sigma_A(\tau) R_2(\tau')) | a \rangle \\
& -\frac{1}{\Delta \tau} \int_\tau^{\tau+\Delta \tau} d\tau' \int_\tau^{\tau'} d\tau'' g(\tau'', \tau') \times \\
& \langle a | (\sigma_A(\tau) R_2(\tau'') R_2(\tau') - R_2(\tau') \sigma_A(\tau) R_2(\tau'')) | a \rangle .
\end{aligned} \tag{6.124}$$

A evolução do operador R_2 , na representação de interação, é

dada por

$$R_2(\tau) = e^{iH_A\tau} R_2 e^{-iH_A\tau}; \quad (6.125)$$

a partir da qual, com o auxílio da relação de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda [A, B] + \frac{1}{2!} \lambda^2 [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} \lambda^3 [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (6.126)$$

obtemos

$$\begin{aligned} R_2(\tau) &= e^{iH_A\tau} R_2 e^{-iH_A\tau} \\ &= R_2 + i\tau [H_A, R_2] + \frac{(i\tau)^2}{2!} [H_A, [H_A, R_2]] + \dots \\ &= \frac{i}{2} \left[1 - i\omega_0\tau + \frac{(i\omega_0\tau)^2}{2!} + \dots \right] R_- - \frac{i}{2} \left[1 + i\omega_0\tau + \frac{(i\omega_0\tau)^2}{2!} + \dots \right] R_+ \\ &= \frac{i}{2} e^{-i\omega_0\tau} R_- - \frac{i}{2} e^{i\omega_0\tau} R_+. \end{aligned} \quad (6.127)$$

Atuando no estado $|a\rangle = |\pm\rangle$, resulta

$$R_2(\tau) |a\rangle = \frac{i}{2} R_- e^{-i\omega_0\tau} |a\rangle - \frac{i}{2} e^{i\omega_0\tau} R_+ |a\rangle = a \frac{i}{2} e^{-ai\omega_0\tau} |b\rangle, \quad (6.128)$$

onde $|b\rangle$ é o estado complementar $|\mp\rangle$ e $a = \pm 1$, conforme o estado seja $|\pm\rangle$. Portanto, (6.124) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_{A_{aa}}(\tau)}{\Delta\tau} &\simeq \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} d\tau' \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' g(\tau', \tau'') \times \\ &\left[ab \frac{1}{4} e^{ai\omega_0\tau' + bi\omega_0\tau''} \langle a | \sigma_A(\tau) | a \rangle + bb \frac{1}{4} e^{ai\omega_0\tau' - ai\omega_0\tau''} \langle b | \sigma_A(\tau) | b \rangle \right] \\ &+ \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} d\tau' \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' g(\tau'', \tau') \times \\ &\left[ab \frac{1}{4} e^{-ai\omega_0\tau' - bi\omega_0\tau''} \langle a | \sigma_A(\tau) | a \rangle + bb \frac{1}{4} e^{ai\omega_0\tau' - ai\omega_0\tau''} \langle b | \sigma_A(\tau) | b \rangle \right], \end{aligned} \quad (6.129)$$

ou, simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau)}{\Delta \tau} &\simeq -\frac{1}{4\Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} d\tau' \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' g(\tau', \tau'') \times \\ &\left[e^{ai\omega_0(\tau'-\tau'')} \sigma_{A_{aa}}(\tau) - e^{-ai\omega_0(\tau'-\tau'')} \sigma_{A_{bb}}(\tau) \right] + h.c., \end{aligned} \quad (6.130)$$

onde $h.c.$ representa o conjugado hermitiano. A função $g(\tau', \tau'')$ é, por definição, o traço do operador densidade do campo, (6.118), que, por sua vez, está relacionado à média estatística a qual, por construção, equivale ao valor esperado no estado $|0_{(\beta)}\rangle$ da Thermo Field Dynamics. Assim,

$$g(\tau', \tau'') = Tr[\sigma_{\phi} \phi(\tau') \phi(\tau'')] = \langle 0_{(\beta)} | \phi(\tau') \phi(\tau'') | 0_{(\beta)} \rangle. \quad (6.131)$$

Neste ponto, fica claro que a função $g(\tau', \tau'')$ nada mais é que a função de Wightman térmica⁶. Assim, substituindo os campos (2.31) obtém-se

$$g(\tau', \tau'') = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^2 - [(\tau' - \tau'') - i\beta n]^2}. \quad (6.132)$$

Em seguida, assim como nos capítulos anteriores, consideramos a equação mestra no caso inercial e, posteriormente, no caso de um referencial acelerado. Para o caso inercial

$$\begin{aligned} t(\tau) &= \gamma\tau, \\ \mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{x}_0 + v\gamma\tau, \end{aligned} \quad (6.133)$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} g(\tau', \tau'') &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i2\beta(\gamma-1)(\tau'-\tau'')(n+\epsilon) - [(\tau'-\tau'') - i\beta(n+\epsilon)]^2} \\ &= \frac{\sqrt{1-v^2} \left[\coth\left(\frac{(v-1)}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\pi}{\beta} (\tau'-\tau'')\right) + \coth\left(\frac{(v+1)}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\pi}{\beta} (\tau'-\tau'')\right) \right]}{8\pi\beta v(\tau'-\tau'')}. \end{aligned} \quad (6.134)$$

⁶O cálculo da função $g(\tau', \tau'')$ pode ser encontrado no apêndice B.1.

A expressão acima é demasiado complexa para ser integrada. Porém, no limite $v \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} g(\tau', \tau'') &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\tau' - \tau'') - i\beta(n + \epsilon)]^2} \\ &= -\frac{1}{4\beta^2} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi(\tau' - \tau'')}{\beta} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Realizando a substituição $u = \tau' - \tau''$, resulta para a equação (6.130)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau)}{\Delta \tau} &\simeq \frac{1}{16\pi^2 \Delta \tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} d\tau' \int_0^{\tau' - \tau} du [u - i\beta(n + \epsilon)]^{-2} \times \\ &\quad [e^{ai\omega_0 u} \sigma_{A_{aa}}(\tau) - e^{-ai\omega_0 u} \sigma_{A_{bb}}(\tau)] + h.c. . \end{aligned} \quad (6.136)$$

Infelizmente, a integral (6.136) é divergente em $u = 0$; para contornar este problema é necessário recorrer às mesmas hipóteses dos capítulos anteriores e restringir o estudo ao caso assintótico $\tau \rightarrow -\infty$. Além disso, como a função $g(\tau', \tau'')$ é par, adicionamos o conjugado hermitiano, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sigma_{A_{aa}}(\tau)}{\Delta \tau} &\simeq \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du [u - i\beta(n + \epsilon)]^{-2} \times \\ &\quad [e^{ai\omega_0 u} \sigma_{A_{aa}}(\tau) - e^{-ai\omega_0 u} \sigma_{A_{bb}}(\tau)], \end{aligned} \quad (6.137)$$

onde foi efetuada a integração $\int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} d\tau' = \Delta \tau$. Integrações semelhantes às encontradas em (6.137) foram amplamente estudadas e resultam

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{+i\omega_0 u}}{[u - i\beta(n + \epsilon)]^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{[u + i\beta\epsilon + i\beta n]^2} = \frac{-2\pi\omega_0}{1 - e^{-\omega_0 \beta}}, \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{[u - i\beta(n + \epsilon)]^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{[u - i\beta\epsilon + i\beta n]^2} \\ &= -2\pi\omega_0 \left(\frac{1}{1 - e^{-\omega_0 \beta}} - 1 \right) = \frac{2\pi\omega_0}{1 - e^{\omega_0 \beta}}. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Escrevendo a equação mestra (6.137) dos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, obtêm-se

$$\frac{\Delta\sigma_+(\tau)}{\Delta\tau} \simeq -\frac{\omega_0}{8\pi} \left\{ \sigma_-(\tau) + \frac{1}{1-e^{-\omega_0\beta}} [\sigma_+(\tau) - \sigma_-(\tau)] \right\}, \quad (6.139)$$

$$\frac{\Delta\sigma_-(\tau)}{\Delta\tau} \simeq \frac{\omega_0}{8\pi} \left\{ \sigma_-(\tau) + \frac{1}{1-e^{-\omega_0\beta}} [\sigma_+(\tau) - \sigma_-(\tau)] \right\}. \quad (6.140)$$

De (6.139) e (6.140), segue que

$$\frac{\Delta\sigma_+(\tau)}{\Delta\tau} = -\frac{\Delta\sigma_-(\tau)}{\Delta\tau} \quad (6.141)$$

e, no estado estacionário, $\frac{\Delta\sigma_+(\tau)}{\Delta\tau} = 0 = \frac{\Delta\sigma_-(\tau)}{\Delta\tau}$, encontramos a condição de balanço detalhado

$$\frac{\sigma_+(\tau)}{\sigma_-(\tau)} = e^{-\omega_0\beta}. \quad (6.142)$$

Resolvendo as equações acopladas (6.139) e (6.140), com as condições iniciais $\sigma_+(0) = \sigma_{0+}$ e $\sigma_-(0) = \sigma_{0-}$, resulta

$$\sigma_+(\tau) = \frac{1}{1+e^{\omega_0\beta}} \left\{ \sigma_{0+} + \sigma_{0-} + [\sigma_{0+}e^{\omega_0\beta} - \sigma_{0-}] e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right\}, \quad (6.143)$$

$$\sigma_-(\tau) = \frac{1}{1+e^{\omega_0\beta}} \left\{ [\sigma_{0+} + \sigma_{0-}] e^{\omega_0\beta} - [\sigma_{0+}e^{\omega_0\beta} - \sigma_{0-}] e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right\}; \quad (6.144)$$

como $\sigma_+(\tau) + \sigma_-(\tau) = 1$ e, conseqüentemente, $\sigma_-(0) = 1 - \sigma_{0+}$, encontramos

$$\sigma_+(\tau) = \sigma_{0+} e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} - \frac{e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau}}{1+e^{\omega_0\beta}} \left[1 - e^{coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right], \quad (6.145)$$

$$\sigma_-(\tau) = -\sigma_{0+} e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} + \frac{e^{-coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau}}{1+e^{\omega_0\beta}} \left[1 + e^{\omega_0\beta} e^{coth(\frac{1}{2}\omega_0\beta)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right]. \quad (6.146)$$

Das expressões acima, (6.145) e (6.146) se apresentam mais interessantes. Nestas, existe uma complexa interdependência envolvendo

σ_{0+} , β , ω_0 que determinará como será a evolução do sistema. Mostra-se na Figura 3 duas configurações: quando o estado σ_+ tem poucas partículas, $\sigma_+(0) \ll \sigma_-(0)$, e altas temperaturas, $\omega_0\beta \ll 1$; neste caso, o sistema evolui para uma condição de equilíbrio de forma preencher igualmente ambos níveis. Na configuração de baixas temperaturas, $\omega_0\beta \gg 1$, e muitas partículas excitadas, $\sigma_+(0) \gg \sigma_-(0)$, o sistema evolui de tal maneira a preencher totalmente σ_- . As condições intermediárias variam entre estes dois extremos. Assim mesmo, verifica-se que o parâmetro β é o principal responsável por determinar o valor para o qual o sistema converge e o parâmetro ω_0 , a taxa com a qual este converge.

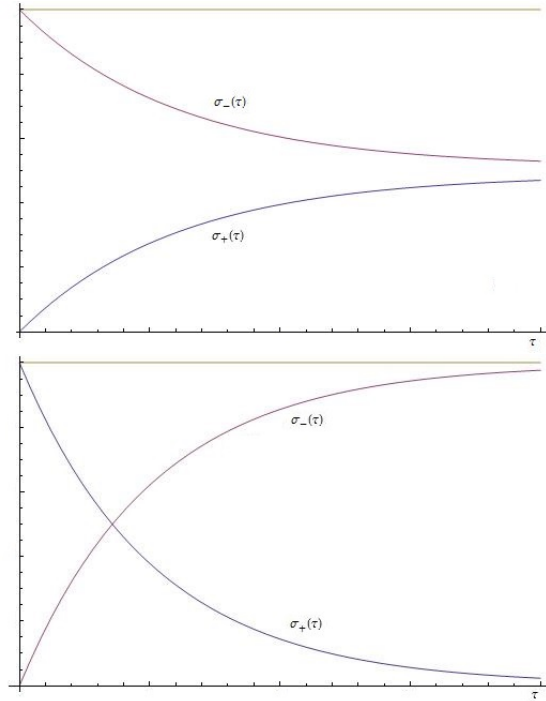


Figura 3: Evolução de $\sigma_+(\tau)$ e $\sigma_-(\tau)$.

Finalmente, analisando o limite $\tau \rightarrow \infty$, obtemos

$$\sigma_+(\tau) = \frac{1}{1 + e^{\omega_0\beta}}, \quad (6.147)$$

$$\sigma_{-}(\tau) = \frac{e^{\omega_0 \beta}}{1 + e^{\omega_0 \beta}}. \quad (6.148)$$

Concluimos então que o sistema atômico de dois níveis estudado obedece à estatística de Fermi-Dirac, como esperado, de acordo com o teorema de Bloch.

Considerando agora o referencial uniformemente acelerado, com parametrização

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau), \\ t(\tau) &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau), \end{aligned} \quad (6.149)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} &g(\tau', \tau'') \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2}{4\pi^2 |\cosh(\alpha\tau') - \cosh(\alpha\tau'')|^2 - [\sinh(\alpha\tau') - \sinh(\alpha\tau'') - i\beta\alpha n]^2} \\ &= \frac{\alpha \left[\coth\left(\frac{\pi(e^{\alpha\tau'} - e^{\alpha\tau''})}{\alpha\beta}\right) - \coth\left(\frac{2\pi e^{-\frac{1}{2}\alpha(\tau' + \tau'')} \sinh(\frac{1}{2}\alpha(\tau' - \tau''))}{\alpha\beta}\right) \right]}{8\pi\beta [\cosh(\alpha\tau') - \cosh(\alpha\tau'')]}. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Assim como no caso inercial, a equação (6.150) é demasiado complexa para substituída em 6.130 e integrada. No entanto, os casos limites nos proporcionam resultados interessantes. Assim, no limite $\alpha \rightarrow 0$, obtém-se

$$g(\tau', \tau'') = -\frac{1}{4\beta^2} \operatorname{csch}\left(\frac{\pi(\tau' - \tau'')}{\beta}\right)^2, \quad (6.151)$$

recuperando, como esperado, o caso inercial e assegurando a consistência de $g(\tau', \tau'')$. No limite de baixas temperaturas, isto é, $\beta \rightarrow \infty$, encontra-se

$$g(\tau', \tau'') = -\frac{\alpha^2}{16\pi^2} \operatorname{csch}\left(\frac{\alpha(\tau' - \tau'')}{2}\right)^2. \quad (6.152)$$

Comparando (6.151) com (6.152), observamos novamente o mapeamento $T = \frac{\alpha}{2\pi k_B}$, resultado obtido tanto para um observador acelerado a temperatura nula como para um observador inercial imerso em um banho de térmico a temperatura T . Portanto, a análise realizada para o caso inercial pode ser refeita para o caso acelerado a temperatura

zero, com $\beta = \frac{2\pi}{\alpha}$, resultando nas populações

$$\sigma_+(\tau) = \sigma_{0+} e^{-\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} - \frac{e^{-\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau}}{1 + e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}}} \left[1 - e^{\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right], \quad (6.153)$$

$$\sigma_-(\tau) = -\sigma_{0+} e^{-\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} + \frac{e^{-\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau}}{1 + e^{\frac{2\pi\omega_0}{\alpha}}} \left[1 + e^{\omega_0 \frac{2\pi}{\alpha}} e^{\coth\left(\frac{\pi\omega_0}{\alpha}\right)\frac{\omega_0}{8\pi}\tau} \right]. \quad (6.154)$$

Por outro lado, ao examinar o gráfico da Figura 4 para $g(\tau', \tau'')$ constatamos que os comportamentos com relação à temperatura e à aceleração não são semelhantes. Nota-se que, a temperatura nula, conforme aumenta a aceleração, a função $g(\tau', \tau'')$ cresce de forma quase linear. Porém, fixando uma temperatura não nula, resulta que ao aumentar a aceleração a função $g(\tau', \tau'')$ decresce.

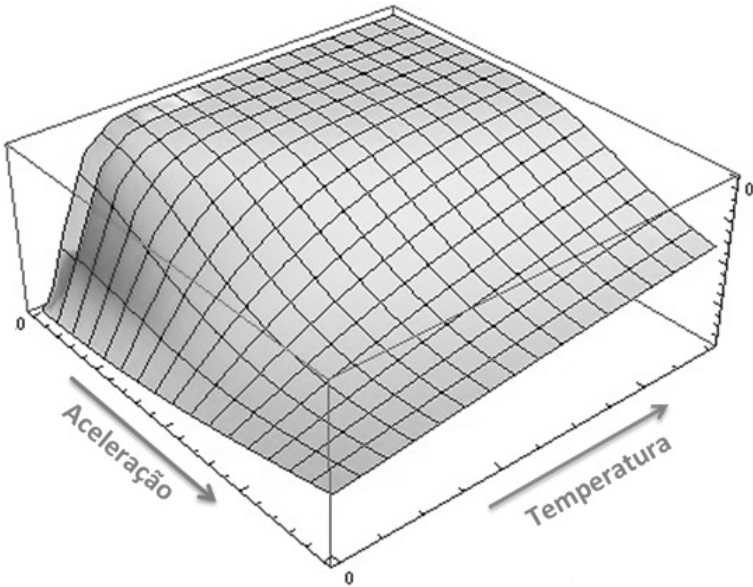


Figura 4: Gráfico de $g(\tau', \tau'')$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram discutidos certos aspectos de sistemas físicos acelerados, dentre eles o efeito Unruh e questões que consideramos serem necessárias para fundamentá-lo fisicamente. Para introduzir o efeito Unruh reproduzimos detalhadamente, na seção (3), os cálculos originais (BIRRELL; DAVIES, 1982). Para estes cálculos, consideramos somente perturbações até primeira ordem; além disso, para obter soluções analíticas, obrigatoriamente, restringimo-nos ao caso assintótico $\tau_0 \rightarrow -\infty$, ou seja, o processo de aceleração aconteceu em um tempo remoto perdendo qualquer informação sobre o transiente. O caso mais realista, com τ_0 finito, leva a probabilidades de transição divergentes. Comparando a função resposta do detector Unruh-DeWitt, ao longo de uma trajetória hiperbólica, com a lei de Planck encontramos a temperatura de Unruh, $T = \frac{\alpha}{2\pi k_B}$. Em seguida, foi proposta uma nova interação do tipo derivativa, para a qual mostramos que existe uma dependência do resultado com o modelo de acoplamento.

A continuação, reproduzimos os resultados tradicionais do formalismo da *Thermo Field Dynamics* (TFD), cujos estados pertencem a um espaço de Hilbert na representação de número. Vimos que a TFD dá origem a novos estados associados a estados térmicos, aplicando o formalismo ao campo escalar livre, inercial e acelerado. Foram propostos dois mapeamentos entre operadores de Rindler e os operadores da TFD; a posteriori, com ajuda do modelo FKM (seção 5.3.3), concluímos que somente o mapeamento $\{b_{\mathbf{k}}^R \rightarrow a_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^L \rightarrow \tilde{a}_{\mathbf{k}}\}$ leva a resultados físicos. Deste modo, o estado de equilíbrio *quase-térmico*, constituído por dois parâmetros de *quase-temperatura*, apresentado por Misra, se encontra incompleto, com a falta do termo divergente $-\frac{1}{2}csch\left(\frac{\pi\omega_{\mathbf{k}}}{a}\right)csch\left(\frac{\beta\omega_{\mathbf{k}}}{2}\right)\delta_{-\mathbf{k}\mathbf{k}}$. Introduzimos a entropia de von Neumann, obtendo a entropia do gás de bosons para o campo escalar. No entanto, ao aplicarmos o mesmo procedimento ao caso acelerado fomos obrigados a eliminar a energia de ponto zero, tal que no limite $\beta \rightarrow \infty$, $S_1 \rightarrow 0$; porém, o mapeamento $\{b_{\mathbf{k}}^R, b_{\mathbf{k}}^L\} \rightarrow a_{\mathbf{k}}$ foi refutado. Como discutido, os modos de frequência negativa levam a uma divergência não renormalizável no limite $\beta \rightarrow \infty$ e, portanto, a uma entropia não física.

Posteriormente, estudamos dois modelos que apresentam equações do tipo Langevin, onde mostramos que para um acoplamento através da velocidade o sistema não irradia, o fluxo de energia proveniente do oscilador é exatamente compensado pelo fluxo de interferência,

sendo o fluxo líquido nulo; para este caso foi introduzida a aceleração através da parametrização hiperbólica nas relações (5.17) e (5.32). Em seguida, apresentamos o modelo FKM, mostrando que este representa um banho térmico, na escala temporal estabelecida; em seguida o sistema foi quantizado e acelerado utilizando os operadores de Rindler. Mostramos que, no limite de baixas temperaturas, o modelo FKM é equivalente ao modelo do oscilador acelerado no campo escalar, consequentemente, que ambos processos de aceleração também o são. No apêndice E.1 mostramos que o oscilador acelerado, discutido na seção 5.2, a temperatura finita de fato irradia e, portanto, que neste caso os fluxos não são compensados e, assim, concluímos que o sistema não thermaliza uma vez que o princípio do balanço detalhado não é respeitado.

Na sequência, estudamos um sistema atômico de dois níveis acoplado a um campo escalar não massivo e construímos uma equação para a evolução da energia desse sistema, separando a variação da energia em duas contribuições distintas, interpretadas como contribuições devido à flutuação do vácuo e à reação de radiação. Calculamos as contribuições para um sistema de dois níveis no caso inercial e uniformemente acelerado. Estes resultados nos levaram a questionar o resultado apresentado por Audretsch e Müller (AUDRETSCH; MÜLLER, 1994) no qual a reação de radiação não é alterada no caso acelerado, que afirmam: *"Thus the fact that the contribution of radiation reaction is not changed in the uniformly accelerated case is perhaps a property of the particular trajectory"*. Mostramos que a variação da energia no caso acelerado consiste da variação da energia para o caso inercial mais um termo de aceleração, tanto para a flutuação do vácuo e como para a reação de radiação. Além disso, observamos que a variação da energia permanece inalterada para o acoplamento derivativo de ordem n .

Posteriormente, estudamos um sistema microscópico em interação com um *reservoir*. Esta proposta levou ao desenvolvimento de uma equação mestra para a evolução do sistema atômico, de modo que, na aproximação *coarse-graining*, isto é, numa resolução temporal não muito fina, a dinâmica desse sistema consiste de um processo Markoviano. Um fato importante a ser discutido é a ideia de equilíbrio térmico que foi utilizada. De fato, o sistema estudado está globalmente em equilíbrio térmico, embora, localmente, ocorram flutuações devido à interação com o *reservoir*; são estas flutuações que nos permitem estabelecer uma equação para a evolução, respeitando o teorema flutuação-dissipação. Retomando o sistema de dois níveis, verificamos, de fato, que a mesma equação de evolução é obtida para um observador acelerado a temperatura zero e um observador inercial imerso em um

banho térmico a temperatura de Unruh.

Ao analisar todos os modelos apresentados, em conjunto, verificamos que nos casos estudados realmente existe o mapeamento dos limites $\lim_{\beta \rightarrow \infty} f(a, \beta) = \lim_{a \rightarrow 0} f(\beta, a)$; o surgimento deste mapeamento fica claro ao notarmos que as equações para os operadores de Rindler (2.57) e (2.58) e os operadores $\alpha(\theta)$ e $\tilde{\alpha}(\theta)$ da TFD (UMEZAWA, 1995) podem ser obtidos, através de transformações de Bogoliubov, semelhantes à empregada na construção de estados *squeezed* de dois modos. A atuação do operador número pode ser resumida em:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle 0 | N_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = 0 & \xleftarrow{a \rightarrow 0} & \langle 0 | N_{\mathbf{k}} | 0 \rangle_R = \langle 0 | \bar{N}_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a} \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \\
 \uparrow \beta \rightarrow \infty & & \uparrow \beta \rightarrow \infty \\
 \langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle & \xleftarrow{a \rightarrow 0} & \langle 0_{(\beta)} | N_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle_R = \langle 0_{(\beta)} | \bar{N}_{\mathbf{k}} | 0_{(\beta)} \rangle \\
 = \langle 0 | N_{\mathbf{k}} (\beta) | 0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} & & = \frac{1}{2} \left[\coth \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \coth \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) - 1 \right] \\
 & & \underbrace{- \frac{1}{2} \csc h \left(\frac{\pi \omega_{\mathbf{k}}}{a} \right) \csc h \left(\frac{\beta \omega_{\mathbf{k}}}{2} \right) \delta_{-\mathbf{k} \mathbf{k}}}_{\text{divergência}}
 \end{array}$$

Neste ponto, podemos dizer que a afirmação de Unruh em seu artigo de 76 "*This result is exactly what one would expect of a detector immersed in a thermal bath of scalar photons of temperature $a/2\pi$.*" está correta, embora o conceito de temperatura de equilíbrio não seja apropriado a um sistema essencialmente dissipativo, à exemplo da radiação emitida por cargas aceleradas (*bremssstrahlung*) no contexto da eletrodinâmica quântica no espaço-tempo de Minkowski. Sobre a questão dos quantas de Unruh, é amplamente aceito na literatura que os modos de Unruh apresentam uma mistura de modos de frequências positivas e negativas, a qual leva a uma média estatística do operador número divergente, devido ao carácter singular do sistema de coordenadas que define a variedades de Rindler.

Finalmente, destacamos os principais resultados obtidos:

- Na formulação da TFD para sistemas quânticos a temperatura finita, as propriedades do operador entropia, para uma partícula com aceleração própria constante levam-nos a concluir que não é possível associá-lo a um sistema em equilíbrio térmico a uma dada temperatura.
- Para uma partícula browniana, como modelo de detector de Unruh, o princípio do balanço detalhado a temperatura finita não é respeitado, uma vez que a taxa de variação de energia associada à mesma não é uma função analítica do parâmetro β ; o sistema atinge o equilíbrio térmico somente no referencial inercial.
- No limite $\beta \rightarrow \infty$, o detector sujeito à força externa que o mantém sobre sua linha de mundo com aceleração própria constante deve necessariamente irradiar. No caso de um detector representado por um sistema de dois níveis, o princípio do balanço detalhado é respeitado nesse limite de baixas temperaturas e este decai ao estado fundamental, dissipando energia que é absorvida pelo campo, considerando como um *reservoir*.
- Nessa situação, embora o conceito de partícula deva ser formulado em base à invariância local de Poincaré da teoria quântica, os quanta de Rindler fariam o papel da radiação de *bremssstrahlung* no referencial próprio do detector, correspondendo ao campo escalar do modelo considerado. Assim, podemos reconhecê-los como sendo os quantas do campo escalar na variedade de Minkowski, e não um mero artefato do referencial não-inercial. Este ponto também foi corroborado por Peña e Sudarsky (PEÑA; SUDARSKY, 2014), que concluem:

"We end this work by emphasizing again that, as the Unruh effect does not represent novel physics, but rather the description of standard and well tested aspects of our physical theories in terms of an alternative set of coordinates, it needs no experimental verification beyond that concerning those standard aspects..."

Como perspectiva futura, pretendemos investigar a quantização canônica do modelo de Ford-O'Connell e FKM na variedade de Rindler, situações nas quais nos deparamos com o problema de ordenamento de operadores, pois a métrica (2.16) envolve o fator conforme que, por sua vez, depende da coordenada ξ associada à evolução temporal da partícula em seu referencial próprio (ASSIRATI, 2010). Esse estudo deve conduzir às equações de Heisenberg que governam a evolução dinâmica de observáveis físicos construídos a partir das coordenadas e momentos canônicos, diretamente sobre a variedade, ao invés de se recorrer às transformações singulares (2.12) e (2.13). Tal estudo será futuramente estendido ao modelo de Audretsch-Müller envolvendo o campo escalar quantizado. Outra possibilidade é a investigação de tais modelos em dimensões quaisquer, bem como considerar o caso de uma partícula browniana em um banho térmico fermiônico.

REFERÊNCIAS

ASSIRATI, J. L. M. **Quantização covariante de sistemas mecânicos**. Tese (Doutorado) — Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2010.

AUDRETSCH, J.; MÜLLER, R. Spontaneous excitation of an accelerated atom: The contributions of vacuum fluctuations and radiation reaction. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 50, p. 1755–1763, ago. 1994.

BEKENSTEIN, J. D. Black holes and entropy. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 7, p. 2333–2346, abr. 1973.

BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. **Quantum fields in curved space**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982.

BISOGNANO, J. J.; WICHMANN, E. H. On the duality condition for a Hermitian scalar field. **Journal of Mathematical Physics**, v. 16, n. 4, p. 985–1007, 1975.

BISOGNANO, J. J. et al. On the duality condition for quantum fields. **Journal of Mathematical Physics**, v. 17, n. 3, p. 303–321, 1976.

COHEN-TANNOUDJI, C.; DUPONT-ROC, J.; GRYNBERG, G. **Atom-photon interactions: basic processes and applications**. [S.l.]: Wiley, 1992.

DAVIES, P. C. W. Scalar production in schwarzschild and rindler metrics. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 8, n. 4, p. 609, 1975.

DEWITT, B. Quantum gravity: the new synthesis. In: HAWKING, S.; ISRAEL, W. (Ed.). **General Relativity: An Einstein centenary survey**. [S.l.: s.n.], 1979. p. 680–745.

ELLIS, G. G. F. R.; WILLIAMS, R. M. **Flat and Curved Space Times**. [S.l.]: Oxford University Press, 2000.

FORD, G.; O'CONNELL, R. Is there unruh radiation? **Phys. Lett. A**, Elsevier, v. 350, n. 1, p. 17–26, 2006.

FORD, G. W.; KAC, M.; MAZUR, P. Statistical mechanics of assemblies of coupled oscillators. **Journal of Mathematical Physics**, v. 6, n. 4, p. 504–515, 1965.

FULLING, S. A. Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 7, p. 2850–2862, maio 1973.

GROVE, P. G. On an inertial observer's interpretation of the detection of radiation by linearly accelerated particle detectors. **Classical and Quantum Gravity**, v. 3, n. 5, p. 801, 1986.

HAWKING, S. Particle creation by black holes. **Commun. Math. Phys.**, Springer-Verlag, v. 43, n. 3, p. 199–220, 1975.

HAWKING, S. W. Black hole explosions. **Nature**, v. 248, n. 5443, p. 30–31, 1974.

PEÑA, I.; SUDARSKY, D. On the possibility of measuring the unruh effect. **Foundations of Physics**, v. 44, n. 6, p. 689–708, 2014.

TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H. Thermo field dynamics. **Collective Phenomena**, v. 2, p. 55, 1975. Reprinted in *Int. J. Mod. Phys. B* 10, 1599 (1996).

TOMAZELLI, J.; COSTA, L. Operator ordering in quantum radiative processes. **Phys. A**, v. 323, n. 0, p. 435–444, 2003.

TOMAZELLI, J. L.; CUNHA, R. O. The master equation for two-level accelerated systems at finite temperature. **Brazilian Journal of Physics**, p. 1–13, 2016.

UMEZAWA, H. **Advanced field theory: micro, macro, and thermal physics**. [S.l.]: Amer Inst of Physics, 1995.

UNRUH, W. G. Notes on black-hole evaporation. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 14, p. 870–892, ago. 1976.

UNRUH, W. G.; WALD, R. M. What happens when an accelerating observer detects a rindler particle. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 29, p. 1047–1056, mar. 1984.

ZHENG, Z.; JIANYANG, Z.; MISRA, B. Hawking-unruh effect on thermal equilibrium state. **Int. J. Theor. Phys.**, Springer, v. 35, n. 4, p. 741–745, 1996.

APÊNDICE A – A Transformação de Bogoliubov

Na seção 2.4 apresentamos as relações (2.57) e (2.58) para a transformação entre os operadores de Minkowski e Rindler. Neste apêndice buscamos relações envolvendo os coeficientes da transformação de Bogoliubov que, as quais não são normalmente derivadas. Devido à completeza das bases $u_{\mathbf{k}}$ e $\bar{u}_{\mathbf{k}}$, é possível expandir uma como combinação linear da outra, permitindo-nos então escrever

$$\bar{u}_{\Omega} = \sum_{\omega} (\alpha_{\Omega\omega} u_{\omega} + \beta_{\Omega\omega} u_{\omega}^*), \quad (\text{A.1})$$

onde ω está relacionado aos momentos de Minkowski e Ω aos momentos de Rindler¹; utilizando as relações de ortogonalidade (2.48) encontramos facilmente os coeficientes $\alpha_{\Omega\omega}$ e $\beta_{\Omega\omega}$:

$$\alpha_{\Omega\omega} = \langle \bar{u}_{\Omega}, u_{\omega} \rangle, \quad (\text{A.2})$$

$$\beta_{\Omega\omega} = -\langle \bar{u}_{\Omega}, u_{\omega}^* \rangle, \quad (\text{A.3})$$

que são conhecidos como coeficientes de Bogoliubov. Podemos também encontrar a relação entre os operadores dos dois espaços, substituindo em (2.49) a expansão (A.1),

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{\Omega, \omega} \left[\bar{a}_{\Omega} (\alpha_{\Omega\omega} u_{\omega} + \beta_{\Omega\omega} u_{\omega}^*) + \bar{a}_{\Omega}^{\dagger} (\alpha_{\Omega\omega}^* u_{\omega}^* + \beta_{\Omega\omega}^* u_{\omega}) \right] \\ &= \sum_{\Omega, \omega} \left[\left(\alpha_{\Omega\omega} \bar{a}_{\Omega} + \beta_{\Omega\omega}^* \bar{a}_{\Omega}^{\dagger} \right) u_{\omega} + \left(\alpha_{\Omega\omega}^* \bar{a}_{\Omega}^{\dagger} + \beta_{\Omega\omega} \bar{a}_{\Omega} \right) u_{\omega}^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Comparando com a expansão para Minkowski (2.29), vemos que

$$a_{\omega} = \sum_{\Omega} \left(\alpha_{\Omega\omega} \bar{a}_{\Omega} + \beta_{\Omega\omega}^* \bar{a}_{\Omega}^{\dagger} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$a_{\omega}^{\dagger} = \sum_{\Omega} \left(\alpha_{\Omega\omega}^* \bar{a}_{\Omega}^{\dagger} + \beta_{\Omega\omega} \bar{a}_{\Omega} \right). \quad (\text{A.6})$$

Concluimos das expressões (A.5) e (A.6) que ambas as bases são iguais se e somente se $\beta_{\Omega\omega}^* = 0$. A partir das relações para os operadores (A.5) e (A.6) também podemos encontrar a transformação inversa de (A.1). Aplicando as relações de comutação, obtemos as relações entre os coeficientes

¹Não confundir com Ω^2 da transformação conforme.

$$\begin{aligned}
[a_\omega^\dagger, a_{\omega'}^\dagger] &= \sum_{\Omega, \Omega'} \left[\left(\alpha_{\Omega\omega}^* \bar{a}_\Omega^\dagger + \beta_{\Omega\omega} \bar{a}_\Omega \right), \left(\alpha_{\Omega'\omega'}^* \bar{a}_{\Omega'}^\dagger + \beta_{\Omega'\omega'} \bar{a}_{\Omega'} \right) \right] \\
&= \sum_{\Omega} (\alpha_{\Omega\omega}^* \beta_{\Omega\omega'} - \beta_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega\omega'}^*) = 0,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$[a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] = \sum_{\Omega} (\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega\omega'}^* - \beta_{\Omega\omega}^* \beta_{\Omega\omega'}) = \delta_{\omega\omega'}. \tag{A.8}$$

Sugerimos então a transformação inversa

$$u_\omega = \sum_{\Omega} (c_{\omega\Omega} \bar{u}_\Omega + d_{\omega\Omega} \bar{u}_\Omega^*); \tag{A.9}$$

substituindo a expansão dos modos (A.1),

$$\begin{aligned}
u_\omega &= \sum_{\Omega, \omega'} [c_{\omega\Omega} (\alpha_{\Omega\omega'} u_{\omega'} + \beta_{\Omega\omega'} u_{\omega'}^*) + d_{\omega\Omega} (\alpha_{\Omega\omega'}^* u_{\omega'} + \beta_{\Omega\omega'}^* u_{\omega'}^*)] \\
&= \sum_{\Omega, \omega'} [(c_{\omega\Omega} \alpha_{\Omega\omega'} + d_{\omega\Omega} \beta_{\Omega\omega'}^*) u_{\omega'} + (c_{\omega\Omega} \beta_{\Omega\omega'} + d_{\omega\Omega} \alpha_{\Omega\omega'}^*) u_{\omega'}^*],
\end{aligned} \tag{A.10}$$

de onde concluímos que

$$\sum_{\Omega} (c_{\omega\Omega} \beta_{\Omega\omega'} + d_{\omega\Omega} \alpha_{\Omega\omega'}^*) = 0, \tag{A.11}$$

$$\sum_{\Omega} (c_{\omega\Omega} \alpha_{\Omega\omega'} + d_{\omega\Omega} \beta_{\Omega\omega'}^*) = \delta_{\omega\omega'}. \tag{A.12}$$

Comparando as equações (A.11) com (A.7) e (A.12) com (A.8), notamos que

$$c_{\omega\Omega} = \alpha_{\Omega\omega}^*, \tag{A.13}$$

$$d_{\omega\Omega} = -\beta_{\Omega\omega}, \tag{A.14}$$

resultando na transformação inversa

$$u_\omega = \sum_{\Omega} (\alpha_{\Omega\omega}^* \bar{u}_\Omega - \beta_{\Omega\omega} \bar{u}_\Omega^*), \tag{A.15}$$

e nos operadores

$$\bar{a}_\Omega = \sum_{\omega} (\alpha_{\Omega\omega}^* a_\Omega - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega^\dagger), \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{a}_\Omega^\dagger = \sum_{\omega} (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega^\dagger - \beta_{\Omega\omega} a_\omega). \quad (\text{A.17})$$

Concluimos das expressões (A.5) e (A.6) que ambas bases são iguais se e somente se $\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* = 0$; uma vez que possuímos uma relação entre os operadores, podemos definir o operador número $N_{\mathbf{k}'} = a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'}$, que conta quantas partículas de frequência $\omega_{\mathbf{k}'}$ possui um estado arbitrário. Assim, se efetuarmos a contagem de ambos os vácuos resulta

$$\langle 0 | N_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} {}_R \langle 0 | N_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle_R &= {}_R \langle 0 | a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle_R \\ &= \sum_{\mathbf{k}} {}_R \langle 0 | \left(\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}} \right) \left(\alpha_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \bar{a}_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^* \bar{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) | 0 \rangle_R = \sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Conforme esperado, a equação (A.18) nos diz que se contamos o número de partículas com o operador número de Minkowski, no respectivo vácuo, não encontramos nenhuma partícula; por outro lado, a equação (A.19) indica que, contando o número de partícula no vácuo de Rindler, observamos $\sum_{\mathbf{k}} |\beta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*|^2$ partículas, ou seja, para detectores no espaço-tempo de Minkowski o estado de mínima energia na variedade de Rindler não está vazio.

Derivaremos agora relações satisfeitas pelos coeficientes de Bogoliubov (A.2) e (A.3). Primeiramente, iremos introduzir um novo sistema de coordenadas, conhecido como coordenadas do cone de luz

$$\begin{cases} u = t - x \\ v = t + x \end{cases}, \quad (\text{A.20})$$

para Minkowski e, para Rindler,

$$\begin{cases} \bar{u} = \eta - \xi \\ \bar{v} = \eta + \xi \end{cases}. \quad (\text{A.21})$$

Neste sistema, conseguimos escrever a relação entre as coordenadas de Minkowski e Rindler (2.10) ou (2.11) como

$$u = -a^{-1}e^{-a\bar{u}}, \quad (\text{A.22})$$

$$v = a^{-1}e^{a\bar{v}}; \quad (\text{A.23})$$

o elemento de linha (2.16) resulta

$$ds^2 = dudv = e^{a(\bar{v}-\bar{u})}d\bar{u}d\bar{v}. \quad (\text{A.24})$$

Retornando à equação do campo escalar no espaço-tempo de Minkowski (2.26), escrevendo-a no caso bidimensional

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \left[a_{k'} e^{-i(\omega_{k'}t - k'.x)} + a_{k'}^{\dagger} e^{i(\omega_{k'}t - k'.x)} \right] \quad (\text{A.25})$$

para os casos $k' > 0$ e $k' < 0$, temos

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \int_0^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \left[a_{k'} e^{-i(\omega_{k'}t - k'.x)} + a_{k'}^{\dagger} e^{i(\omega_{k'}t - k'.x)} \right] \\ & + \int_{-\infty}^0 \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \left[a_{k'} e^{-i(\omega_{k'}t - k'.x)} + a_{k'}^{\dagger} e^{i(\omega_{k'}t - k'.x)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Definindo $\omega \equiv \omega_{k'} = |k'|$ e trocando a variável de integração para $d\omega$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{\omega} e^{-i\omega(t-x)} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega(t-x)} \right] \\ & + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{-\omega} e^{-i\omega(t+x)} + a_{-\omega}^{\dagger} e^{i\omega(t+x)} \right] \\ = & \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{\omega} e^{-i\omega u} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega u} \right] + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^{\dagger} e^{i\omega v} \right] \\ = & \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[(a_{\omega} e^{-i\omega u} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega u}) + (a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^{\dagger} e^{i\omega v}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Da mesma forma, podemos efetuar a transformação no campo de Rindler para o *wedge* R

$$\begin{aligned}
\phi^R(\eta, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \left[a_{k'} e^{ik'\xi - i\omega_{k'}\eta} + a_{k'}^\dagger e^{-ik'\xi + i\omega_{k'}\eta} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\left(\bar{a}_\Omega e^{-i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{i\Omega\bar{u}} \right) + \left(\bar{a}_{-\Omega} e^{-i\Omega\bar{v}} + \bar{a}_{-\Omega}^\dagger e^{i\Omega\bar{v}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{A.28}$$

onde, para os modos de Rindler, definimos $\Omega \equiv \omega_{k'} = |k'|$. Das equações (A.22) e (A.23) vemos que u e \bar{u} são independentes de v e \bar{v} ; assim, podemos escrever para o *wedge* R

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u} \right] = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_\Omega e^{-i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{i\Omega\bar{u}} \right], \tag{A.29}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^\dagger e^{i\omega v} \right] = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_{-\Omega} e^{-i\Omega\bar{v}} + \bar{a}_{-\Omega}^\dagger e^{i\Omega\bar{v}} \right]. \tag{A.30}$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados de (A.29), obtemos para o lado direito

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\bar{u}} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_\Omega e^{-i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{i\Omega\bar{u}} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} \left[\bar{a}_\Omega e^{-i(\Omega-k)\bar{u}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{i(\Omega+k)\bar{u}} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \left[\bar{a}_\Omega \delta(\Omega - k) + \bar{a}_\Omega^\dagger \delta(\Omega + k) \right] = \frac{1}{\sqrt{2k}} \bar{a}_k^R - i \frac{1}{\sqrt{2k}} \bar{a}_{-k}^{\dagger R},
\end{aligned} \tag{A.31}$$

onde foi adicionado o superíndice R para indicar que são operadores do *wedge* R . Para o lado esquerdo,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\bar{u}} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} \left[a_\omega e^{-i\omega u + ik\bar{u}} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u + ik\bar{u}} \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}} \left[a_\omega F(k, \omega) + a_\omega^\dagger F(k, -\omega) \right],
\end{aligned} \tag{A.32}$$

onde definimos

$$F(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{ik\bar{u} - i\omega u}. \quad (\text{A.33})$$

Para calcular explicitamente a equação (A.33), primeiramente substituímos a transformação inversa de (A.22), $\bar{u} = -a^{-1} \ln(-au)$, em (A.33)

$$F(\sigma_1 k, \sigma_2 \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} e^{\sigma_1 i k \bar{u} - \sigma_2 i \omega u} = \frac{a^{-\sigma_1 \frac{ik}{a}}}{2\pi a} \int_0^{\infty} du u^{-\sigma_1 \frac{ik}{a} - 1} e^{\sigma_2 i \omega u}, \quad (\text{A.34})$$

onde se adiciona os termos σ_1 e $\sigma_2 = \pm 1$ para posteriormente obtermos todos os $F(k, \omega)$ possíveis. A equação (A.34) é muito similar à função gama

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (\text{A.35})$$

Substituindo $s = -\sigma_1 \frac{ik}{a} + \epsilon$ e $b = -\sigma_2 i \omega - \epsilon$, onde introduzimos o fator de convergência $\epsilon > 0$, para contornar a divergência de (A.34) em $k = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} F(\sigma_1 k, \sigma_2 \omega) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{a^s}{2\pi a} \int_0^{\infty} du u^{s-1} e^{-bu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{a^{-\sigma_1 \frac{ik}{a}}}{2\pi a} b^{-s} \Gamma(s) \\ &= \frac{a^{-\sigma_1 \frac{ik}{a}}}{2\pi a} e^{[\sigma_1 i \frac{k}{a} \ln|\omega| + \sigma_1 \sigma_2 \frac{\pi k}{2a}]} \Gamma(-\sigma_1 \frac{ik}{a}), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

onde utilizamos a relação $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ com $-\pi < \arg(z) < \pi$, para escrever

$$b^{-s} = e^{-s \ln b} = e^{[\sigma_1 i \frac{k}{a} \ln|\omega| + \sigma_1 \sigma_2 \frac{\pi k}{2a}]}. \quad (\text{A.37})$$

Por último, utilizamos a relação

$$\Gamma(iy) = \left[\frac{\pi}{y \sinh(\pi y)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.38})$$

resultando finalmente em

$$F(\sigma_1 k, \sigma_2 \omega) = e^{\sigma_1 \frac{ik}{a} \ln(\frac{|\omega|}{a})} e^{\sigma_1 \sigma_2 \frac{\pi k}{2a}} \left[\frac{1}{4\pi a k \sinh(\frac{k\pi}{a})} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.39})$$

Deste modo, para (A.29)

$$\bar{a}_k^R - i\bar{a}_{-k}^{\dagger R} = \left[\frac{1}{4\pi a \sinh\left(\frac{k\pi}{a}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty d\omega \frac{e^{\frac{ik}{a} \ln\left(\frac{\omega}{a}\right)}}{\sqrt{\omega}} \left[a_\omega e^{\frac{\pi k}{2a}} + a_\omega^\dagger e^{-\frac{\pi k}{2a}} \right]; \quad (\text{A.40})$$

repetindo o mesmo procedimento para (A.30) obtemos

$$\bar{a}_k^R - i\bar{a}_{-k}^{\dagger R} = \left[\frac{1}{4\pi a \sinh\left(\frac{k\pi}{a}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^0 d\omega \frac{e^{\frac{ik}{a} \ln\left(\frac{|\omega|}{a}\right)}}{\sqrt{\omega}} \left[a_\omega e^{\frac{\pi k}{2a}} + a_\omega^\dagger e^{-\frac{\pi k}{2a}} \right]. \quad (\text{A.41})$$

Somando (A.40) e (A.41)

$$\bar{a}_k^R - i\bar{a}_{-k}^{\dagger R} = \left[\frac{1}{16\pi a \sinh\left(\frac{k\pi}{a}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{e^{\frac{ik}{a} \ln\left(\frac{|\omega|}{a}\right)}}{\sqrt{\omega}} \left[a_\omega e^{\frac{\pi k}{2a}} + a_\omega^\dagger e^{-\frac{\pi k}{2a}} \right]. \quad (\text{A.42})$$

Similarmente, para o *wedge* L ,

$$\begin{aligned} \phi^L(\eta, \xi) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dk'}{\sqrt{4\pi\omega_{k'}}} \left[a_{k'} e^{ik'\xi + i\omega_{k'}\eta} + a_{k'}^\dagger e^{-ik'\xi - i\omega_{k'}\eta} \right] \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\left(\bar{a}_\Omega e^{i\Omega\bar{v}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{-i\Omega\bar{v}} \right) + \left(\bar{a}_{-\Omega} e^{i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_{-\Omega}^\dagger e^{-i\Omega\bar{u}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

implicando nas relações

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u} \right] = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_{-\Omega} e^{i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_{-\Omega}^\dagger e^{-i\Omega\bar{u}} \right], \quad (\text{A.44})$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left[a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^\dagger e^{i\omega v} \right] = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_\Omega e^{i\Omega\bar{v}} + \bar{a}_\Omega^\dagger e^{-i\Omega\bar{v}} \right]. \quad (\text{A.45})$$

Efetuada a transformada de Fourier no lado direito de (A.44), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\bar{u}} \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \left[\bar{a}_{-\Omega} e^{i\Omega\bar{u}} + \bar{a}_{-\Omega}^{\dagger} e^{-i\Omega\bar{u}} \right] \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{2\pi} \left[\bar{a}_{-\Omega} e^{i(\Omega+k)\bar{u}} + \bar{a}_{-\Omega}^{\dagger} e^{-i(\Omega-k)\bar{u}} \right] \quad (\text{A.46}) \\
&= \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{2\Omega}} \left[\bar{a}_{-\Omega} \delta(\Omega+k) + \bar{a}_{-\Omega}^{\dagger} \delta(\Omega-k) \right] = -i \frac{\bar{a}_k^L}{\sqrt{2k}} + \frac{\bar{a}_{-k}^{\dagger L}}{\sqrt{2k}},
\end{aligned}$$

de modo que, para os operadores,

$$\bar{a}_{-k}^{\dagger L} - i\bar{a}_k^L = \left[\frac{1}{16\pi a \sinh\left(\frac{k\pi}{a}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{\frac{ik}{a} \ln\left(\frac{|\omega|}{a}\right)}}{\sqrt{\omega}} \left[a_{\omega} e^{\frac{\pi k}{2a}} + a_{\omega}^{\dagger} e^{-\frac{\pi k}{2a}} \right]. \quad (\text{A.47})$$

Comparando (A.40) com (A.47) notamos que

$$\bar{a}_k^R - i\bar{a}_{-k}^{\dagger R} = \bar{a}_{-k}^{\dagger L} - i\bar{a}_k^L, \quad (\text{A.48})$$

e, fazendo uso das transformações arbitrárias (A.16) e (A.17),

$$\begin{aligned}
& \sum_{\omega} \left[(\alpha_{\Omega\omega}^{*R} + i\beta_{-\Omega\omega}^R) a_{\omega} - (\beta_{\Omega\omega}^{*R} + i\alpha_{-\Omega\omega}^R) a_{\omega}^{\dagger} \right] \\
&= \sum_{\omega} \left[-(\beta_{-\Omega\omega}^L + i\alpha_{\Omega\omega}^{*L}) a_{\omega} + (\alpha_{-\Omega\omega}^L + i\beta_{\Omega\omega}^{*L}) a_{\omega}^{\dagger} \right], \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

resulta

$$\alpha_{\Omega\omega}^{*R} + i\beta_{-\Omega\omega}^R = -\beta_{-\Omega\omega}^L - i\alpha_{\Omega\omega}^{*L}, \quad (\text{A.50})$$

$$-\beta_{\Omega\omega}^{*R} - i\alpha_{-\Omega\omega}^R = \alpha_{-\Omega\omega}^L + i\beta_{\Omega\omega}^{*L}. \quad (\text{A.51})$$

As expressões (A.50) e (A.51) são equivalentes e o máximo que conseguimos extrair dos coeficientes de Bogoliubov, sem impormos novas considerações.

APÊNDICE B – Funções de Wightman e Pauli-Jordan

Ao longo do texto foram utilizadas diversas vezes as funções de Wightman e Pauli-Jordan; expõe-se neste apêndice como obtê-las. Partindo da equação de Klein-Gordon (2.31)

$$\phi(t, \mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right], \quad (\text{B.1})$$

encontra-se a função de Wightman de frequência positiva (3.17), definida como $\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle$. Atuando o campo no vácuo,

$$\begin{aligned} \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[a_{\mathbf{k}'} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}'}t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}'}t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \right] | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{i(\omega_{\mathbf{k}'}t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

resulta o c -número

$$\begin{aligned} &\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}'}}} e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\omega_{\mathbf{k}'}t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \langle 0 | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Calculando agora a função de Pauli-Jordan, definida como $[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x}')]$, obtemos

$$\begin{aligned} &[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x}')] \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left\{ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} - e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde utilizamos as relações de comutação (2.33) e (2.34). Comparando (B.4) com (B.3), nota-se que a função de Pauli-Jordan está relacionada com as funções de Wightman por

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x}')] = \langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(t', \mathbf{x}') \phi(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle. \quad (\text{B.5})$$

Calculando as integrais em (B.4) para o caso não massivo, $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$, resulta

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm i[\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] } \\
& = \int |\mathbf{k}| \sin(\varphi) d\theta d\varphi d|\mathbf{k}| e^{\pm i|\mathbf{k}|[(t-t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos(\varphi)]},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

onde foi efetuada uma transformação para coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm i[\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] } \\
& = 2\pi \int_0^\infty |\mathbf{k}| d|\mathbf{k}| e^{\pm i|\mathbf{k}|(t-t')} \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi e^{\mp i|\mathbf{k}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos(\varphi)} \\
& = \frac{\pm 2\pi}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \left[e^{\pm i|\mathbf{k}|[(t-t') + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|]} - e^{\pm i|\mathbf{k}|[(t-t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|]} \right].
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Neste ponto é necessário introduzir os fatores de convergência $\pm i\epsilon$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{\pm i[\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] } \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pm 2\pi}{i|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left\{ \frac{-1}{\pm i[(t-t' \pm i\epsilon) + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|]} - \frac{-1}{\pm i[(t-t' \pm i\epsilon) - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|]} \right\} \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{4\pi}{[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (t-t' \pm i\epsilon)^2]}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Assim, as funções de Wightman resultam ser

$$\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (t - t' - i\epsilon)^2]}, \tag{B.9}$$

$$\langle 0 | \phi(t', \mathbf{x}') \phi(t, \mathbf{x}) | 0 \rangle = \frac{1}{4\pi^2 [|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (t - t' + i\epsilon)^2]}, \tag{B.10}$$

e, consequentemente, a função de Pauli-Jordan

$$\begin{aligned} & [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t', \mathbf{x}')] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{[|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2-(t-t'-i\epsilon)^2]} - \frac{1}{[|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2-(t-t'+i\epsilon)^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

B.1 FUNÇÕES DE WIGHTMAN TÉRMICAS

Definimos a função de Wightman térmica como

$$\begin{aligned} & \langle 0_{(\beta)} | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0_{(\beta)} \rangle \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}} \left[e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{i(\omega_{\mathbf{k}'}t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}')} \langle 0_{(\beta)} | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0_{(\beta)} \rangle + h.c \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{16\pi^3 \omega_{\mathbf{k}}} \left[e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')} (1 + f_b) + e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')} f_b \right], \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

onde f_b é a distribuição de Bose-Einstein (4.34). Efetuando-as de maneira análoga à seção anterior e integrando-as separadamente, resulta para o primeiro termo

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{k}' \frac{e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') + i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{16\pi^3 \omega_{\mathbf{k}} (1 - e^{-\beta\omega_{\mathbf{k}}})} = \int d\theta d\varphi d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}| \sin(\varphi) e^{-i|\mathbf{k}|[(t-t') - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \cos(\varphi)]}}{16\pi^3 (1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|})} \\ &= \int d|\mathbf{k}| \frac{e^{-i|\mathbf{k}|(t-t')}}{i 8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'| (1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|})} \left[e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{1}{i 8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d|\mathbf{k}| e^{-\beta|\mathbf{k}|n} e^{-i|\mathbf{k}|(t-t')} \left[e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{-1}{8\pi^2 |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{-i\beta n + (t-t') - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{-i\beta n + (t-t') + |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2 - [(t-t') - i\beta n]^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

onde utilizamos a relação $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta|\mathbf{k}|n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta|\mathbf{k}|}}$. Para o segundo termo

$$\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{k} \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-t') - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{16\pi^3 \omega_{\mathbf{k}} [e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1]} &= \int d\theta d\varphi d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}| \sin(\varphi) e^{i|\mathbf{k}|[(t-t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \cos(\varphi)]}}{16\pi^3 [e^{\beta|\mathbf{k}|} - 1]} \\
&= \int d|\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|(t-t')}}{i 8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| [e^{\beta|\mathbf{k}|} - 1]} \left[e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= \frac{1}{i 8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d|\mathbf{k}| e^{-\beta|\mathbf{k}|(n+1)} e^{i|\mathbf{k}|(t-t')} \left[e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= \frac{-1}{8\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{-i\beta n + (t-t') - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{-i\beta(n+1) + (t-t') + |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - [(t-t') + i\beta(n+1)]^2} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - [(t-t') + i\beta n]^2}.
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Resulta então

$$\begin{aligned}
\langle 0_{(\beta)} | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0_{(\beta)} \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^2 - [(\tau' - \tau'') - i\beta n]^2} \\
+ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^2 - [(\tau' - \tau'') + i\beta n]^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|^2 - [(\tau' - \tau'') - i\beta n]^2}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

B.2 FUNÇÕES DE WIGHTMAN NA VARIEDADE DE MINKOWSKI E RINDLER

Uma vez encontradas as Funções de Wightman, podemos aplicar as parametrizações propostas para os referencias nas variedades de Minkowski e Rindler. Para o caso inercial,

$$\begin{aligned}
t(\tau) &= \gamma\tau, \\
\mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{x}_0 + v\gamma\tau,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

é trivial encontrar

$$\langle 0 | \phi(t, \mathbf{x}) \phi(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle = - \frac{1}{4\pi^2 (\tau' - \tau'' - i\epsilon')^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)}. \tag{B.17}$$

Para o caso acelerado, partindo da parametrização

$$\begin{aligned}x(\tau) &= \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau), \\t(\tau) &= \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau),\end{aligned}\tag{B.18}$$

resulta¹ para os denominadores das funções de Wightman

$$\begin{aligned}& \left[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (t - t' \pm i\epsilon)^2 \right] \\&= \alpha^{-2} |\cosh(\alpha\tau) - \cosh(\alpha\tau')|^2 - \alpha^{-2} [\sinh(\alpha\tau) - \sinh(\alpha\tau') \pm i\epsilon\alpha]^2.\end{aligned}\tag{B.19}$$

Utilizando as relações das funções hiperbólicas

$$\cosh(\alpha\tau) - \cosh(\alpha\tau') = 2\sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau + \tau')\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right),\tag{B.20}$$

$$\sinh(\alpha\tau) - \sinh(\alpha\tau') = 2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau + \tau')\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right),\tag{B.21}$$

encontramos

$$\begin{aligned}& \left[|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 - (t - t' \pm i\epsilon)^2 \right] \\&= 4\alpha^{-2} \left[\sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau + \tau')\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right) \right]^2 \\&- \alpha^{-2} \left[2\cosh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau + \tau')\right) \sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right) \pm i\epsilon\alpha \right]^2 \\&= -4\alpha^{-2} \left[\sinh\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right) \pm i\alpha\epsilon_1 \right]^2 + O(\epsilon^2) \\&= -4\alpha^{-2} \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau')\right) \pm i\alpha\epsilon_2 + O(\epsilon^2).\end{aligned}\tag{B.22}$$

Note que foram utilizados diferentes ϵ 's durante a demonstração, onde $\epsilon_2 = \epsilon_2^1 \csc h(\alpha(\tau - \tau')) [\sinh(\alpha\tau) - \sinh(\alpha\tau')]$, não sendo necessário se preocupar com uma possível troca de sinal, pois $\epsilon_2 > 0$, $\forall \tau \neq \tau'$. Assim, só devemos garantir que $\epsilon \rightarrow 0$ mais rapidamente que a $\csc h(x)$, no limite $x \rightarrow 0$. Deste modo, a função de Wightman de frequência positiva resultante é

¹Lembrando novamente que estamos no caso bidimensional, i.e, $y = 0 = z$.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \phi(\tau') \phi(\tau'') | 0 \rangle &= \frac{-\alpha^2}{4 \sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau') - i\epsilon\alpha\right)} \\
&= \frac{\alpha^2}{4 \sin^2\left(i\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau') + \epsilon\alpha\right)} = \frac{\alpha^2}{4} \csc^2\left(i\frac{\alpha}{2}(\tau - \tau') + \epsilon\alpha\right),
\end{aligned} \tag{B.23}$$

onde foi utilizada a propriedade $\sinh(x) = -i \sin(ix)$.

APÊNDICE C – Cálculo de Integrais pelo Método dos Resíduos

Nas seções 3.1, 6.1 e 6.2 foram utilizados diversos resultados provenientes de integrais solucionadas pelo teorema do resíduo. Apresenta-se aqui os cálculos dessas integrais. O teorema do resíduo estabelece que

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f; z_k), \quad (\text{C.1})$$

onde γ é um contorno fechado e z_k os polos no interior do contorno no plano complexo. Além disso, se a função $f(z)$ é da forma $f(z) = e^{ia} z g(z)$, com $a > 0$, e analítica no semiplano superior¹, considerando o contorno mostrado na Figura 5,

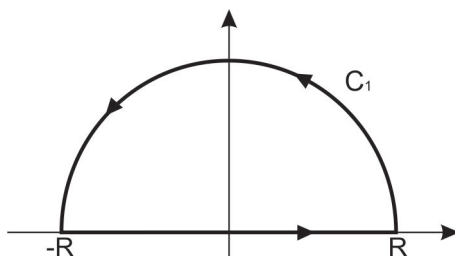


Figura 5: Contorno de integração.

por definição, temos

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{c_1} f(z) dz; \quad (\text{C.2})$$

recorrendo ao lema de Jordan, para $R \rightarrow \infty$, resulta

$$\int_{c_1} f(z) dz = 0 \quad (\text{C.3})$$

e, consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f; z_k). \quad (\text{C.4})$$

Caso o contorno escolhido esteja no semiplano inferior, obtemos uma relação análoga; porém, é necessário que $a < 0$. A primeira integral a ser resolvida pelo teorema do resíduo surge na expressão (3.22),

¹A menos de um número finito de pontos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{(u - i\epsilon')^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iaz}}{(z - z_k)^2}, \quad (\text{C.5})$$

com $a = -\Delta E < 0$ e $z_k = i\epsilon'$. Deste modo, o contorno de integração deve situar-se no semiplano inferior e, conforme observamos na Figura 6,

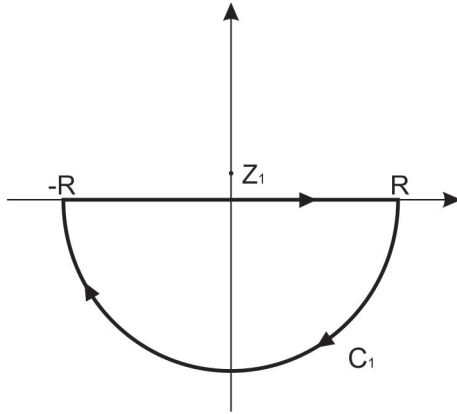


Figura 6: Polo único no exterior do contorno.

o polo z_1 está fora do contorno fechado. Assim, de acordo com (C.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iaz}}{(z - i\epsilon)^2} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Em (6.61) e (6.62), aparece uma integral similar a (C.5),

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iaz}}{(z - z_k)^2}, \quad (\text{C.7})$$

com $a = -\omega_0 < 0$ e $z_k = -i\epsilon'$. Porém, examinando o polo na Figura 7, vemos que o mesmo está situado no interior do contorno de integração.

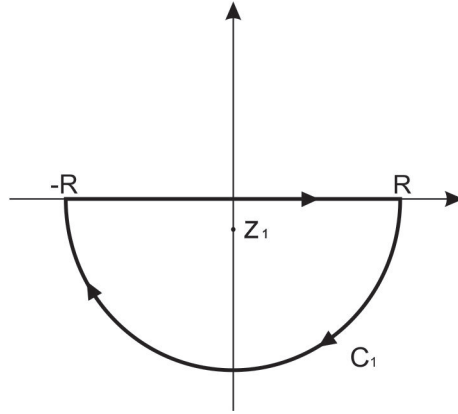


Figura 7: Polo único no interior do contorno.

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ia z}}{(z + i\epsilon)^2} = -2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1) = (-2\pi i) \left. \frac{d}{dz} e^{ia z} \right|_{z_k} = 2\pi a e^{ia z_k} \quad (\text{C.8})$$

e, especificamente para (6.61) e (6.62),

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-i\omega_0 u}}{(u + i\epsilon')^2} = -2\pi\omega_0. \quad (\text{C.9})$$

Em (3.27) apresenta-se a integral

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{[u - i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2} \rightarrow \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ia z}}{[z - z_k]^2}, \quad (\text{C.10})$$

com $a = -\Delta E < 0$ e $z_k = i2\epsilon - i\frac{2\pi}{\alpha}n$. Ao observar os polos na Figura 8,

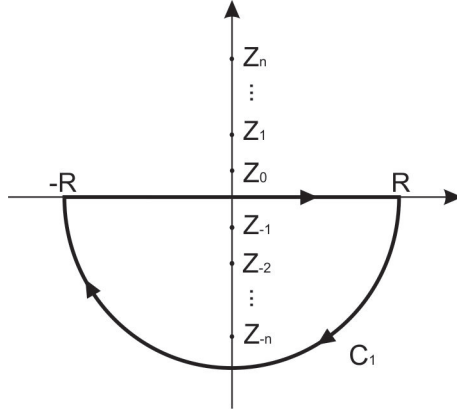


Figura 8: Contorno com n -polos.

nota-se que somente os polos com $k \leq 1$ ($n \geq 1$) estão no interior do contorno fechado, de forma que

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ia z}}{[z - z_k]^2} &= -2\pi i \sum_{k \leq 1} \text{Res}(f; z_k) \\ &= -2\pi i \sum_{k \leq 1} \left. \frac{d}{dz} e^{ia z} \right|_{z_k} = 2\pi a \sum_{k \leq 1} e^{ia z_k} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

e, em particular para (3.27),

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{[u - i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2} \\ &= -2\pi\Delta E \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}n} \right] = -2\pi\Delta E \left[\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Em (6.78) e (6.79) surge a integral

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{[u + i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2} \rightarrow \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ia z}}{[z - z_k]^2} \quad (\text{C.13})$$

com $a = -\Delta E < 0$ e $z_k = -i2\epsilon - i\frac{2\pi}{\alpha}n$. Examinando os polos mostrados na Figura 9,

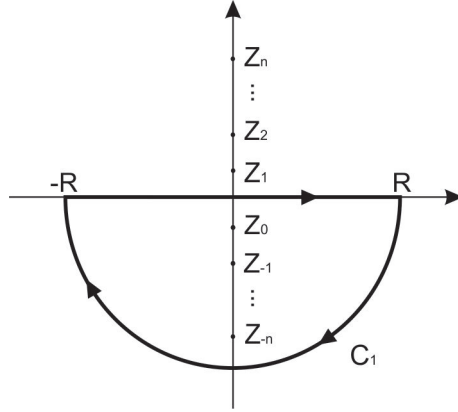


Figura 9: Contorno com n -polos.

constata-se, agora, que o polo $k = 0$ está dentro do contorno; assim, os polos no interior do contorno fechado são $k \leq 0$ ($n \geq 0$). Como resultado

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{ia z}}{[z - z_k]^2} &= -2\pi i \sum_{k \leq 0} \text{Res}(f; z_k) \\ &= -2\pi i \sum_{k \leq 0} \left. \frac{d}{dz} e^{ia z} \right|_{z_k} = 2\pi a \sum_{k \leq 0} e^{ia z_k} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

e, particularmente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{-iu\Delta E}}{[u + i2\epsilon + i\frac{2\pi}{\alpha}n]^2} \\ = -2\pi\Delta E \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}n} \right] = \frac{-2\pi\Delta E}{1 - e^{-\frac{2\pi\Delta E}{\alpha}}}. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

C.1 SÉRIE DE LAURENT PARA O QUADRADO DA COSSECANTE

Neste apêndice demonstramos a relação

$$\csc^2(\pi z) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - n)^{-2}. \quad (\text{C.16})$$

Propomos, convenientemente, a integral

$$\oint \cot g(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz, \quad (\text{C.17})$$

observando que esta possui polo simples em $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$, $z = N$, $N \in \mathbb{Z}$, e um o polo duplo em $z = z_k$. Assim, conforme C.1, para um contorno fechado, resulta

$$\oint \cot(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f; z_k) + \sum_N \text{Res}(f; N) \right]. \quad (\text{C.18})$$

O primeiro resíduo é facilmente encontrado:

$$\text{Res}(f; z_k) = \left. \frac{d}{dz} \cot(\pi z) \right|_{z_k} = -\pi \csc^2(\pi z_k); \quad (\text{C.19})$$

o segundo termo é um resíduo de polo simples,

$$\text{Res}(f; N) = \left. \frac{\cos(\pi z)}{[z - z_k]^2} \frac{1}{\frac{d}{dz} \sin(\pi z)} \right|_N = \frac{1}{\pi [N - z_k]^2}. \quad (\text{C.20})$$

Portanto,

$$\oint \cot(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz = -2i \left[\pi^2 \csc^2(\pi z_k) - \sum_N \frac{1}{[z_k - N]^2} \right]. \quad (\text{C.21})$$

Por outro lado, majorando a integral (C.17)

$$\left| \oint \cot(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz \right| \leq \oint \frac{|\cot(\pi z)|}{|z - z_k|^2} |dz|; \quad (\text{C.22})$$

assim, temos para a cotangente

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \left| \frac{|e^{i\pi z}| + |e^{-i\pi z}|}{|e^{i\pi z}| - |e^{-i\pi z}|} \right| \quad (\text{C.23})$$

$$= \left| \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} \right| = |\coth(\pi y)|,$$

onde utilizamos $z = x + iy$, resultando

$$\left| \oint \cot(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz \right| \leq \oint \frac{|\coth(\pi y)|}{|z - z_k|^2} |dz|. \quad (\text{C.24})$$

Considerando o contorno fechado mostrado na Figura 10,

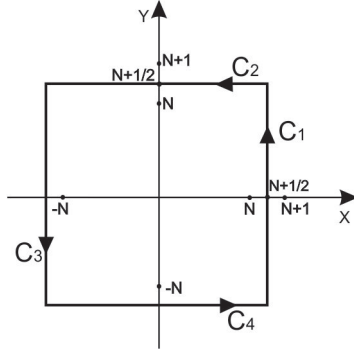


Figura 10: Contorno de integração.

dividimos a integral nas curvas do contorno

$$\begin{aligned} & \oint \frac{|\coth(\pi y)|}{|z - z_k|^2} |dz| \\ &= \left[\int_{C_1} + \int_{C_3} \right] dy \frac{|\coth(\pi y)|}{|z - z_k|^2} + |\coth(\pi y)| \left[\int_{C_2} + \int_{C_4} \right] dx \frac{1}{|z - z_k|^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Escrevendo o polo como $z_k = a + ib$, obtemos para a curva C_1 , com $z = \left(N + \frac{1}{2}\right) + iy$ e $z_k \neq N + \frac{1}{2}$

$$|z - z_k|^2 = \left(N + \frac{1}{2} - a\right)^2 + (y - b)^2 \geq N^2. \quad (\text{C.26})$$

Da mesma maneira, para as demais curvas, obtemos

$$C_2 : |z - z_k|^2 = (x - a)^2 + \left(N + \frac{1}{2} - b\right)^2 \geq N^2, \text{ p/ } z_k \neq i\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{C.27})$$

$$C_3 : |z - z_k|^2 = \left(N + \frac{1}{2} + a\right)^2 + (y - b)^2 \geq N^2, \quad p/z_k \neq -\left(N + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{C.28})$$

$$C_4 : |z - z_k|^2 = (x - a)^2 + \left(N + \frac{1}{2} + b\right)^2 \geq N^2, \quad p/z_k \neq -i\left(N + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{C.29})$$

As integrais sobre as curvas C_2 e C_4 resultam

$$\begin{aligned} |\coth(\pi y)| \int_{C_2} dx \frac{1}{|z - z_k|^2} &\leq \frac{|\coth(\pi y)|}{N^2} \int_{\left(N + \frac{1}{2}\right)}^{-\left(N + \frac{1}{2}\right)} dx \\ &= -\frac{(2N+1)|\coth(\pi y)|}{N^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$|\coth(\pi y)| \int_{C_4} dx \frac{1}{|z - z_k|^2} \leq \frac{(2N+1)|\coth(\pi y)|}{N^2}. \quad (\text{C.31})$$

As integrais C_1 e C_3 , devido ao termo $|\coth(\pi y)|$ ser divergente para $y = 0$, são divididas nos casos $y \neq 0$ e $y = 0$. Deste modo, para o caso $y \neq 0$, temos o termo $|\coth(\pi y)| \leq c$, limitado numa constante c , fornecendo

$$\frac{1}{N^2} \int_{C_1} dy |\coth(\pi y)| \leq -\frac{(2N+1)c}{N^2}, \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{1}{N^2} \int_{C_3} dy |\coth(\pi y)| \leq \frac{(2N+1)c}{N^2}. \quad (\text{C.33})$$

No caso $y = 0$, retomamos o termo original, $|\cot(\pi z)|$, resultando nas integrais

$$\frac{1}{N^2} \left| \cot \left(\pi \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right| \int_{C_1} dy = -\frac{(2N+1)}{N^2} \left| \cot \left(\pi \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right|, \quad (\text{C.34})$$

$$\frac{1}{N^2} \left| \cot \left(\pi \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right| \left| \int_{C_3} dy = \frac{(2N+1)c}{N^2} \left| \cot \left(\pi \left(N + \frac{1}{2} \right) \right) \right| \right|. \quad (\text{C.35})$$

Assim, para $N \rightarrow \infty$, todas integrais tendem a zero e, consequentemente,

$$\left| \oint \cot(\pi z) \frac{1}{[z - z_k]^2} dz \right| \leq 0, \quad (\text{C.36})$$

de onde

$$\csc^2(\pi z_k) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[z_k - N]^2}. \quad (\text{C.37})$$

APÊNDICE D – Expansão do Vácuo de Rindler

Neste apêndice mostraremos que o vácuo de Rindler pode ser visto como um estado de mistura dos operadores $b_{\mathbf{k}}^{R\dagger}$ e $b_{\mathbf{k}}^{L\dagger}$, resultando em

$$|0\rangle_R = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{C_{\mathbf{k}}} e^{\frac{S_{\mathbf{k}}}{C_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}} |0\rangle. \quad (\text{D.1})$$

Definimos a transformação de Bogoliubov entre os operadores $\bar{a}_{\mathbf{k}}^R$ e $b_{\mathbf{k}}^R$ como

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\mathbf{k}}^R &= U b_{\mathbf{k}}^R U^{-1}, \\ \bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} &= U b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} U^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

onde U é o operador unitário

$$U(\theta) = e^{iG(\theta)}, \quad (\text{D.3})$$

sendo $G(\theta)$ o gerador da transformação e $\theta \equiv \theta(a)$ uma função da aceleração. Utilizando a expressão (D.2) pode-se relacionar o estado $|0\rangle_R$ com o vácuo de Minkowski $|0\rangle \equiv |0\rangle^R \otimes |0\rangle^L$; invertendo-a,

$$b_{\mathbf{k}}^R = U^{-1} \bar{a}_{\mathbf{k}}^R U. \quad (\text{D.4})$$

Atuando a expressão acima no estado $|0\rangle$,

$$b_{\mathbf{k}}^R |0\rangle = U^{-1} \bar{a}_{\mathbf{k}}^R U |0\rangle = 0, \quad (\text{D.5})$$

um vez que $\bar{a}_{\mathbf{k}}^R |0\rangle_R = 0$, torna-se clara a relação entre os vácuos nos dois espaços

$$|0\rangle_R = U |0\rangle. \quad (\text{D.6})$$

O gerador da transformação para o caso da variedade de Rindler é dado por

$$G_R = i \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \left[\bar{a}_{\mathbf{k}}^{R\dagger} \bar{a}_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} - \bar{a}_{\mathbf{k}}^R \bar{a}_{-\mathbf{k}}^L \right] = i \sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} \left[b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^L - b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} \right], \quad (\text{D.7})$$

de modo que utilizando a relação de Baker-Campbell-Hausdorff podemos escrever (D.2) como

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\mathbf{k}}^R &= e^{iG_R} b_{\mathbf{k}}^R e^{-iG_R} = b_{\mathbf{k}}^R + i [G_R, b_{\mathbf{k}}^R] + \frac{i^2}{2!} [G_R, [G_R, b_{\mathbf{k}}^R]] \\ &\quad + \frac{i^3}{3!} [G_R, [G_R, [G_R, b_{\mathbf{k}}^R]]] + \cdots,\end{aligned}\tag{D.8}$$

Dados os comutadores

$$[G_R, b_{\mathbf{k}}^R] = i\theta_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger},\tag{D.9}$$

$$[G_R, b_{-\mathbf{k}}^L] = i\theta_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^R,\tag{D.10}$$

encontramos

$$\bar{a}_{\mathbf{k}}^R = \cosh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^R - \sinh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger};\tag{D.11}$$

comparando com (4.37), resultam as relações

$$\begin{aligned}\cosh(\theta_{\mathbf{k}}) &= C_{\mathbf{k}}, \\ \sinh(\theta_{\mathbf{k}}) &= S_{\mathbf{k}}.\end{aligned}\tag{D.12}$$

A continuação, propomos a expansão da forma

$$\begin{aligned}U(\theta) &= e^{\sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger} - b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^L]} \\ &= e^{\sum_{\mathbf{k}} \theta_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}})} = e^{\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} f(\theta_{\mathbf{k}})} e^{\sum_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}} g(\theta_{\mathbf{k}})} e^{\sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} h(\theta_{\mathbf{k}})},\end{aligned}\tag{D.13}$$

onde

$$\begin{aligned}A_{\mathbf{k}} &= b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}, \\ B_{\mathbf{k}} &= -b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^L, \\ C_{\mathbf{k}} &= -[A_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}}] = -b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{k}}^R - b_{-\mathbf{k}}^L b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}.\end{aligned}\tag{D.14}$$

Antes de proceder, para que a expressão (D.13) possa ser alcançada, os operadores¹ A , B e C , necessariamente devem formar uma álgebra fechada, ou seja, satisfazem a identidade de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0.\tag{D.15}$$

¹A partir desse ponto, visando não sobrecarregar a notação, excluiremos os subíndices \mathbf{k} , retornando-os ao final.

De fato, definidas as relações de comutação

$$[b_{\mathbf{k}}^R, b_1^{R\dagger}] = [b_{\mathbf{k}}^L, b_1^{L\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}1}, \quad (\text{D.16})$$

$$[b_{\mathbf{k}}^R, b_1^L] = [b_{\mathbf{k}}^R, b_1^{L\dagger}] = 0, \quad (\text{D.17})$$

encontramos

$$[A, B] = -C,$$

$$[A, C] = 2A, \quad (\text{D.18})$$

$$[B, C] = -2B;$$

uma vez verificado o fechamento da álgebra resta determinar os coeficientes $f(\theta)$, $g(\theta)$ e $h(\theta)$. Diferenciando (D.13) em relação a θ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}U &= (A + B)U \\ &= AU \frac{d}{d\theta}f(\theta) + e^{Af(\theta)}Ce^{Cg(\theta)}e^{Bh(\theta)}\frac{d}{d\theta}g(\theta) + UB\frac{d}{d\theta}h(\theta) \quad (\text{D.19}) \\ &= \left[A\frac{d}{d\theta}f(\theta) + e^{Af(\theta)}Ce^{-Af(\theta)}\frac{d}{d\theta}g(\theta) + UBU^{-1}\frac{d}{d\theta}h(\theta) \right] U, \end{aligned}$$

de modo que

$$\left(1 - \frac{d}{d\theta}f(\theta)\right)A + B - UBU^{-1}\frac{d}{d\theta}h(\theta) - e^{Af(\theta)}Ce^{-Af(\theta)}\frac{d}{d\theta}g(\theta) = 0. \quad (\text{D.20})$$

Multiplicando por $e^{-Af(\theta)}$ à esquerda e por $e^{Af(\theta)}$ à direita, resulta

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{d}{d\theta}f(\theta)\right)A + e^{-Af(\theta)}Be^{Af(\theta)} \\ &- e^{Cg(\theta)}Be^{-Cg(\theta)}\frac{d}{d\theta}h(\theta) - C\frac{d}{d\theta}g(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Utilizando a relação de Baker-Campbell-Hausdorff, obtemos para os termos exponenciais

$$\begin{aligned} e^{-Af(\theta)}Be^{Af(\theta)} &= B - f(\theta)[A, B] + \frac{f^2(\theta)}{2!}[A, [A, B]] + \dots \\ &= B + f(\theta)C - f^2(\theta)A, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

e

$$\begin{aligned}
e^{Cg(\theta)} B e^{-Cg(\theta)} &= B + g(\theta) [C, B] + \frac{g^2(\theta)}{2!} [C, [C, B]] + \dots \\
&= B + 2g(\theta) B + \frac{g^2(\theta)}{2!} 2^2 B + \frac{g^3(\theta)}{3!} 2^3 B + \dots \\
&= B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2g(\theta))^n}{n!} = B e^{2g(\theta)}.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Substituindo (D.21) na expressão acima,

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{d}{d\theta} f(\theta)\right) A + \left(B + f(\theta) C - f^2(\theta) A\right) \\
&- B e^{2g(\theta)} \frac{d}{d\theta} h(\theta) - \frac{d}{d\theta} C g(\theta) = 0,
\end{aligned} \tag{D.24}$$

e fatorando os operadores, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(1 - f^2(\theta) - \frac{d}{d\theta} f(\theta)\right) A + \left(1 - e^{2g(\theta)} \frac{d}{d\theta} h(\theta)\right) B \\
&+ \left(f(\theta) - \frac{d}{d\theta} g(\theta)\right) C = 0.
\end{aligned} \tag{D.25}$$

Como os operadores A , B e C são linearmente independentes, para que a equação anterior seja válida, cada termo deve ser nulo; resolvendo as equações diferenciais com as condições de contorno

$$U(0) = 1 \Rightarrow f(0) = g(0) = h(0) = 0, \tag{D.26}$$

a equação

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) = 1 - f^2(\theta), \tag{D.27}$$

tem como solução

$$\theta = \int \frac{df}{1 - f^2} = \operatorname{arctanh}(f) \Rightarrow f(\theta) = \tanh(\theta). \tag{D.28}$$

Substituindo $f(\theta)$,

$$\frac{d}{d\theta} g(\theta) = f(\theta) = \tanh(\theta), \tag{D.29}$$

resulta

$$g(\theta) = \ln[\cosh(\theta)]. \tag{D.30}$$

Finalmente, resolvendo para $h(\theta)$,

$$\frac{d}{d\theta} h(\theta) = e^{-2g(\theta)} = \cosh^{-2}(\theta), \quad (\text{D.31})$$

obtemos

$$h(\theta) = \tanh(\theta). \quad (\text{D.32})$$

A equação (D.13) torna-se então

$$U = e^{\sum_{\mathbf{k}} \tanh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}} e^{-\sum_{\mathbf{k}} \ln[\cosh(\theta_{\mathbf{k}})] (b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{k}}^R + b_{-\mathbf{k}}^L b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger})} e^{-\sum_{\mathbf{k}} \tanh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^L}. \quad (\text{D.33})$$

Expandindo as exponenciais em somatórios e atuando no vácuo de Minkowski, encontramos as relações

$$e^{-\sum_{\mathbf{k}} \tanh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^R b_{-\mathbf{k}}^L} |0\rangle = 1, \quad (\text{D.34})$$

$$e^{-\sum_{\mathbf{k}} \ln[\cosh(\theta_{\mathbf{k}})] (b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{\mathbf{k}}^R + b_{-\mathbf{k}}^L b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger})} |0\rangle = e^{-\sum_{\mathbf{k}} \ln[\cosh(\theta_{\mathbf{k}})]} |0\rangle; \quad (\text{D.35})$$

portanto, de (D.6) e (D.12) encontramos finalmente

$$|0\rangle_R = \prod_{\mathbf{k}} \cosh^{-1}(\theta_{\mathbf{k}}) e^{\tanh(\theta_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}} |0\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{C_{\mathbf{k}}} e^{\frac{S_{\mathbf{k}}}{C_{\mathbf{k}}} b_{\mathbf{k}}^{R\dagger} b_{-\mathbf{k}}^{L\dagger}} |0\rangle. \quad (\text{D.36})$$

APÊNDICE E – Relações do Oscilador Acelerado

E.1 FLUXO PARA UM OSCILADOR ACELERADO A TEMPERATURA FINITA

Vimos na seção 5.2.1 que uma partícula acelerada não irradia no caso de temperatura zero. Queremos verificar se o sistema ainda não irradia caso $T \neq 0$, ou seja, desejamos mostrar que

$$\langle j(x, t) \rangle = 0. \quad (\text{E.1})$$

Mostramos que $\langle j_0(x, t) \rangle = 0$, independentemente da temperatura. Assim, de (5.25) e (5.26), e utilizando a relação $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}$, a equação E.1 torna-se

$$\langle j(x, t) \rangle = \left\langle \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} \left[\frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi^h}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi^h}{\partial \tau} \right] \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} \right\rangle = 0. \quad (\text{E.2})$$

Derivando (5.12) e (5.14) encontramos

$$\frac{\partial \phi^h}{\partial \tau} = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \omega_1 \left[ia_k c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} - ia_k^\dagger c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} \right], \quad (\text{E.3})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{2\sigma dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \omega_1^2 \times \\ &\left[a_k \alpha(\omega_1) c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} + a_k^\dagger \alpha(\omega_1)^* c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi^h}{\partial \tau} \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \omega_1 \left[2\sigma \omega_1 \alpha(\omega_1) - i \right] c(k, \omega_1) e^{-i\omega_1 \tau} a_k \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \frac{dk}{\sqrt{\sigma 4\pi\omega_k}} \omega_1 \left[2\sigma \omega_1 \alpha(\omega_1)^* + i \right] c(k, \omega_1)^* e^{i\omega_1 \tau} a_k^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Multiplicando por $\frac{\partial y(\tau)}{\partial \tau}$ e tomando o valor esperado, obtemos para o fluxo total

$$\begin{aligned} \langle j(x, t) \rangle &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \frac{dk}{\omega_k} \omega_1 \omega_2^2 (1 + 2f_b) \times \\ &\quad \left\{ [2\sigma\omega_1\alpha(\omega_1) - i]\alpha(\omega_2)^* c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} + c.c. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

onde c.c. indica o complexo conjugado; utilizando a relação

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} (1 + 2f_b) c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} (1 + 2f_b) c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

encontramos finalmente

$$\begin{aligned} \langle j(x, t) \rangle &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \omega_1 \omega_2^2 \frac{dk}{k} (1 + 2f_b) c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \times \\ &\quad \left\{ [2\sigma\omega_1\alpha(\omega_1) - i]\alpha(\omega_2)^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} + [2\sigma\omega_1\alpha^*(\omega_1) + i]\alpha(\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Como todos os demais termos são diferentes de zero, temos necessariamente que

$$\begin{aligned} &[2\sigma\omega_1\alpha(\omega_1) - i]\alpha(\omega_2)^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)\tau} \\ &+ [2\sigma\omega_1\alpha^*(\omega_1) + i]\alpha(\omega_2) e^{i(\omega_1 - \omega_2)\tau} = 0, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

e, para um τ arbitrário, a condição é alcançada com $\omega_1 = \omega_2$ ou com $K = m\omega_1^2$. Desse modo, a integral nos momentos tem que ser proporcional à delta de Dirac, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} (1 + 2f_b) c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \rightarrow \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (\text{E.10})$$

Como mostramos que para $T = 0$ isto nos leva à relação E.2, resta então calcular

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{k} f_b c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} f_b [c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* + c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2)]. \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Substituindo (E.29) resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{dk}{k} f_b \left[c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* + c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2) \right] \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2\alpha}(\omega_1 + \omega_2)}}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} f_b \left[\left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \Gamma\left(-\frac{i\omega_1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_2}{\alpha}\right) + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

A integral dos momentos

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} f_b \left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} = \alpha^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \int_0^\infty dk \frac{k^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) - 1}}{(e^{\beta k} - 1)}, \quad (\text{E.13})$$

é divergente, de modo que, para calcula-la devemos adicionar um fator de convergência ε . Realizando as substituições $x = \beta k$ e $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-x(n+1)} = \frac{1}{e^x - 1}$, obtemos

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} f_b \left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\beta \alpha)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \times \quad (\text{E.14})$$

$$\beta^{-\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dx e^{-x(n+1)} x^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) - 1 + \varepsilon},$$

onde o termo $\beta^{-\varepsilon}$ é fundamental para mantermos os limites originais, isto é, a integral vai a zero conforme $\beta \rightarrow \infty$. Resolvendo a integral

$$\int_0^\infty dx e^{-x(n+1)} x^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) - 1 + \varepsilon} \quad (\text{E.15})$$

$$= (1+n)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) - \varepsilon} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) + \varepsilon\right)$$

e, efetuando o somatório,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) - \varepsilon} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2) + \varepsilon\right) \quad (\text{E.16})$$

$$= \Gamma\left[\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)\right] \zeta\left[\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)\right],$$

resulta

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} f_b \left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} = \beta^{-\varepsilon} (\beta \alpha)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \times \Gamma \left[\frac{i}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right] \zeta \left[\frac{i}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right] \quad (\text{E.17})$$

e, para (E.11),

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k} f_b c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = \frac{e^{\frac{\pi}{2\alpha}(\omega_1 + \omega_2)}}{\alpha^2} \beta^{-\varepsilon} \times \left\{ (\beta \alpha)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \zeta \left[\frac{i}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right] \Gamma \left[\frac{i}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right] \Gamma \left(-\frac{i\omega_1}{\alpha} \right) \Gamma \left(\frac{i\omega_2}{\alpha} \right) + c.c. \right\}. \quad (\text{E.18})$$

Utilizando a relação da função beta $\mathcal{B}(A, B) = \frac{\Gamma(A)\Gamma(B)}{\Gamma(A+B)}$ e $|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}$, obtemos

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k} f_b c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = \frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\frac{\pi}{2\alpha}(\omega_1 + \omega_2)}}{(\omega_1 - \omega_2) \sinh \left[\frac{\pi}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right]} \beta^{-\varepsilon} \times \left\{ (\beta \alpha)^{-\frac{i}{\alpha}(\omega_1 - \omega_2)} \zeta \left[\frac{i}{\alpha} (\omega_1 - \omega_2) \right] \mathcal{B} \left(-\frac{i\omega_1}{\alpha}, \frac{i\omega_2}{\alpha} \right) + c.c. \right\}. \quad (\text{E.19})$$

Como a equação (E.19) não é nula ou uma delta de Dirac, resulta que $\langle j(x, t) \rangle \neq 0$, isto é, um sistema a uma dada temperatura diferente de zero irá irradiar. Salientamos que tal conclusão também se aplica ao limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, para o qual a expressão é divergente devido à condição sobre as funções gama, na representação integral de Euler, independentemente do procedimento de regularização adotado. Em outras palavras, a taxa de radiação (E.8) não pode ser representada por uma função analítica da temperatura; para $\beta \rightarrow \infty$, esta deve se anular, uma vez que, à medida que a partícula acelerada irradia, perdendo energia, esta é suprida pela força externa, mantendo-a em sua trajetória hiperbólica no espaço-tempo.

E.2 PRIMEIRA RELAÇÃO

Neste apêndice demonstraremos a relação (5.17) da seção 5.2, isto é, queremos mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\omega_k} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = \frac{4\pi^2 e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega_1} \delta(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 \sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega_1\right)}. \quad (\text{E.20})$$

De (5.11) temos

$$c(k, \omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i[\omega_1 \tau + kx(\tau) - |k|t(\tau)]}, \quad (\text{E.21})$$

para a parametrização hiperbólica resulta

$$c(k, \omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i[\omega_1 \tau + kc\alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau) - |k|\alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau)]} \quad (\text{E.22})$$

e, portanto,

$$c(k, \omega_1)^* = c(-k, \omega_1). \quad (\text{E.23})$$

Reescrevemos a parametrização hiperbólica em termos de $z = e^{-\alpha\tau}$

$$\begin{cases} x(\tau) = \alpha^{-1} \cosh(\alpha\tau) = \frac{1}{2\alpha} [z^{-1} + z], \\ t(\tau) = \alpha^{-1} \sinh(\alpha\tau) = \frac{1}{2\alpha} [z^{-1} - z]. \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

Substituindo em (E.22) e considerando o caso k positivo, encontramos

$$c(k, \omega_1) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} dz z^{-1} e^{i[\omega_1 \tau + \frac{kz}{\alpha}]}. \quad (\text{E.25})$$

Como $\tau = -\alpha^{-1} \ln(z)$,

$$c(k, \omega_1) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} dz z^{-1} z^{-\frac{i\omega_1}{\alpha}} e^{i\frac{kz}{\alpha}}, \quad (\text{E.26})$$

e, com a troca de variável $t = \frac{k}{\alpha} z$,

$$c(k, \omega_1) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i\omega_1}{\alpha}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{i\omega_1}{\alpha}-1} e^{it}. \quad (\text{E.27})$$

Reconhecendo que temos uma função gama rotacionada de $\frac{1}{2}\pi$ no plano complexo,

$$\int_0^\infty dt t^{s-1} e^{it} = e^{i\frac{1}{2}\pi s} \Gamma(s), \quad (\text{E.28})$$

resulta

$$c(k, \omega_1) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i\omega_1}{\alpha}} e^{\frac{\pi\omega_1}{2\alpha}} \Gamma\left(-\frac{i\omega_1}{\alpha}\right). \quad (\text{E.29})$$

Utilizando a relação (E.23), reescrevemos a integral de partida como

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{|k|} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \\ &= \int_0^\infty \frac{dk}{k} [c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* + c(k, \omega_1)^* c(k, \omega_2)]. \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

Substituindo (E.29),

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{|k|} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2\alpha}(\omega_1+\omega_2)}}{\alpha^2} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \left[\left(\frac{k}{\alpha} \right)^{\frac{i}{\alpha}(\omega_1-\omega_2)} \Gamma\left(-\frac{i\omega_1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_2}{\alpha}\right) + c.c. \right], \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

onde *c.c.* indica o complexo conjugado, realizando a troca de variável $v = \ln\left(\frac{k}{\alpha}\right)$ e reconhecendo a representação integral da delta de Dirac, obtemos

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{|k|} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = 4\pi \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega_1}}{\alpha} \Gamma\left(-\frac{i\omega_1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{i\omega_1}{\alpha}\right) \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (\text{E.32})$$

Finalmente, utilizando a propriedade da função gama $|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \sinh(\pi x)}$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{|k|} c(k, \omega_1) c(k, \omega_2)^* = \frac{4\pi^2 e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega_1}}{\omega_1 \sinh\left(\pi \frac{\omega_1}{\alpha}\right)} \delta(\omega_1 - \omega_2). \quad (\text{E.33})$$

E.3 SEGUNDA RELAÇÃO

A seguir, demonstraremos a relação (5.32), assim, iremos mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\omega - k}{\omega} c(k, \omega_1) e^{-i(kx - |k|t + \omega_1\tau)} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}\omega_1}}{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}\omega_1\right)}. \quad (\text{E.34})$$

Como o termo $\frac{\omega - k}{\omega}$ se anula para $k > 0$ e utilizando a relação (E.29),

$$\begin{aligned} I &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\omega - k}{\omega} c(k, \omega_1) e^{-i(kx - |k|t + \omega_1\tau)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk c(k, \omega_1)^* e^{-i(\omega_1\tau - kx - kt)} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi\omega_1}{2\alpha}} \Gamma\left(\frac{i\omega_1}{\alpha}\right)}{\pi\alpha} \int_0^{\infty} dk \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{-\frac{i\omega_1}{\alpha}} e^{-i(\omega_1\tau - kx - kt)}, \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

fazendo a troca de variável $s = k(x + t)$ e utilizando a relação (E.28) para a função gama,

$$I = \frac{e^{\frac{\pi\omega_1}{\alpha}} e^{-i\omega_1\tau} e^{i\frac{1}{2}\pi}}{\pi\alpha(x+t)} \left[\frac{1}{\alpha(x+t)} \right]^{-\frac{i\omega_1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{i\omega_1}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{i\omega_1}{\alpha}\right). \quad (\text{E.36})$$

Utilizando a relação da função gama $\Gamma(ix) \Gamma(1 - ix) = \frac{-i\pi}{\sinh(\pi x)}$, encontramos

$$I = \frac{e^{-i\omega_1\tau}}{\alpha(x+t)} \left[\frac{1}{\alpha(x+t)} \right]^{-\frac{i\omega_1}{\alpha}} \frac{e^{\frac{\pi\omega_1}{\alpha}}}{\sinh\left(\pi \frac{\omega_1}{\alpha}\right)}. \quad (\text{E.37})$$

Finalmente, observando que na parametrização hiperbólica temos $\alpha(x+t) = e^{\alpha\tau}$ e $\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{1}{\alpha(x+t)}$, resulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\omega - k}{\omega} c(k, \omega_1) e^{-i(kx - |k|t + \omega_1\tau)} = \frac{\partial\tau}{\partial t} \frac{e^{\frac{\pi\omega_1}{\alpha}}}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_1}{\alpha}\right)}. \quad (\text{E.38})$$

APÊNDICE F – Equações de Movimento

Expõe-se aqui uma maneira de resolver as equações (6.7), (6.8) e (6.9); como as equações são similares, soluciona-se somente (6.7) sendo as demais soluções totalmente análogas. Assim, para (6.7)

$$\frac{d}{d\tau} R_{\pm}(\tau) = \pm i\omega_0 R_{\pm}(\tau) + i\mu\phi(\tau) [R_2(\tau), R_{\pm}(\tau)], \quad (\text{F.1})$$

que a solução seja

$$R_{\pm}(\tau) = e^{\pm i\omega_0\tau} f(\tau). \quad (\text{F.2})$$

Substituindo (F.2) em (F.1) resulta

$$\pm i\omega_0 R_{\pm}(\tau) + e^{\pm i\omega_0\tau} \frac{d}{d\tau} f(\tau) = \pm i\omega_0 R_{\pm}(\tau) + i\mu\phi(\tau) [R_2(\tau), R_{\pm}(\tau)], \quad (\text{F.3})$$

de modo que

$$\frac{d}{d\tau} f(\tau) = i\mu e^{\mp i\omega_0\tau} \phi(\tau) [R_2(\tau), R_{\pm}(\tau)]. \quad (\text{F.4})$$

Integrando (F.4) entre τ_0 e τ

$$f(\tau) = f(\tau_0) + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' e^{\mp i\omega_0\tau'} \phi(\tau') [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau')] \quad (\text{F.5})$$

e retornando a (F.2),

$$R_{\pm}(\tau) = f(\tau_0) e^{\pm i\omega_0\tau} + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau')} [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau')]. \quad (\text{F.6})$$

Substituindo (F.2) para τ_0 resulta

$$R_{\pm}(\tau_0) = e^{\pm i\omega_0\tau_0} f(\tau_0), \quad (\text{F.7})$$

$$R_{\pm}(\tau) = R_{\pm}(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau_0)} + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau')} [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau')]. \quad (\text{F.8})$$

De (F.8) para o tempo τ' ,

$$R_{\pm}(\tau') = R_{\pm}(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau'-\tau_0)} + \mathcal{O}(\mu), \quad (\text{F.9})$$

de modo que, substituindo em (F.8), resulta até primeira ordem em μ

$$\begin{aligned} R_{\pm}(\tau) &= R_{\pm}(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau_0)} \\ &+ i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau')} [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau_0)], \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

de onde, reconhecendo novamente (F.8), segue, finalmente,

$$R_{\pm}(\tau) = R_{\pm}(\tau_0) e^{\pm i\omega_0(\tau-\tau_0)} + i\mu \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \phi(\tau') [R_2(\tau'), R_{\pm}(\tau)]. \quad (\text{F.11})$$

APÊNDICE G – Variação de Energia para o Campo

Na seção 6.1 derivou-se uma equação para as contribuições devido à flutuação do vácuo e à reação de radiação para as taxas de variação da energia do sistema atômico. Neste apêndice mostraremos que o balanço de energia é respeitado, i.e., observamos que a variação da energia do campo é igual, em módulo, à respectiva variação para o sistema atômico. Partindo da equação de Heisenberg (6.6), resulta para a energia do campo

$$\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) = i [H_I(\tau), H_F(\tau)] = i\mu R_2(\tau) [\phi(\tau), H_F(\tau)]. \quad (\text{G.1})$$

Substituindo $R_2(\tau)$ em termos de sua parte livre e de interação,

$$\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) = i\mu \left[R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right] [\phi(\tau), H_F(\tau)], \quad (\text{G.2})$$

assim como o campo $\phi(\tau)$, obtemos

$$\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) = i\mu \left[R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right] \left\{ [\phi^f(\tau), H_F(\tau)] + [\phi^S(\tau), H_F(\tau)] \right\}. \quad (\text{G.3})$$

Para evitar cálculos desnecessários, desprezaremos em (G.3) todos os termos de ordem cúbica ou superiores em μ . Assim, primeiramente, escrevemos a equação (G.4) em função da parte livre e de interação do campo

$$\begin{aligned} H_F(t) &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\partial_t (\phi^f(t, \mathbf{x}) + \phi^S(t, \mathbf{x})) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[\nabla (\phi^f(t, \mathbf{x}) + \phi^S(t, \mathbf{x})) \right]^2. \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Expandindo (G.4), pode-se reconhecer três partes, uma parte livre proporcional a μ^0 ,

$$H_F^f(t) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left\{ [\partial_t \phi^f(t, \mathbf{x})]^2 + [\nabla \phi^f(t, \mathbf{x})]^2 \right\}, \quad (\text{G.5})$$

uma parte proporcional a μ^1 ,

$$H_F^{fS}(t) = \int d^3\mathbf{x} \left\{ [\partial_t \phi^f(t, \mathbf{x})] [\partial_t \phi^S(t, \mathbf{x})] + [\nabla \phi^f(t, \mathbf{x})] [\nabla \phi^S(t, \mathbf{x})] \right\}, \quad (\text{G.6})$$

e uma parte puramente de interação e proporcional a μ^2 ,

$$H_F^S(t) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left\{ [\partial_t \phi^S(t, \mathbf{x})]^2 + [\nabla \phi^S(t, \mathbf{x})]^2 \right\}. \quad (\text{G.7})$$

A equação (G.3) contém os seguintes comutadores

$$\begin{aligned} & R_2^f(\tau) [\phi^f(\tau), H_F(\tau)] \\ &= R_2^f(\tau) [\phi^f(\tau), H_F^f(\tau)] + R_2^f(\tau) [\phi^f(\tau), H_F^{fS}(\tau)], \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

$$R_2^f(\tau) [\phi^S(\tau), H_F(\tau)] = R_2^f(\tau) [\phi^S(\tau), H_F^f(\tau)], \quad (\text{G.9})$$

$$R_2^S(\tau) [\phi^f(\tau), H_F(\tau)] = R_2^S(\tau) [\phi^f(\tau), H_F^f(\tau)], \quad (\text{G.10})$$

onde retemos somente termos até primeira ordem em μ . Substituindo as equações acima em (G.3), resulta para a evolução do campo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) &= i\mu \left\{ \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) [\phi^f(\tau), H_F^f(\tau)] \right\} \\ &+ i\mu \left\{ R_2^f(\tau) [\phi^S(\tau), H_F^f(\tau)] + R_2^f(\tau) [\phi^f(\tau), H_F^{fS}(\tau)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

A seguir substituímos nos comutadores remanescentes as equações (G.5) e (G.6), obtendo ¹

$$\begin{aligned} [\phi^f(\tau), H_F^f(\tau)] &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}' [\phi^f(t, \mathbf{x}), \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}') \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}')] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}' [\phi^f(t, \mathbf{x}), \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}') \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}')]; \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

utilizando a propriedade de comutadores $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e as relações de comutação canônicas (2.32), resulta

¹Para facilitar a visualização, nos próximos passos será usada a notação $(\tau) = (t(\tau), \mathbf{x}(\tau)) = (t, \mathbf{x})$; ressalta-se que não se está eliminando a parametrização.

$$\left[\phi^f(\tau), H_F^f(\tau) \right] = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' \{ 2 \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}') i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} = i \partial_\tau \phi^f(\tau). \quad (\text{G.13})$$

Para o segundo comutador

$$\begin{aligned} \left[\phi^S(\tau), H_F^f(\tau) \right] &= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' \left[\phi^S(t, \mathbf{x}), \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}') \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}') \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x}' \left[\phi^S(t, \mathbf{x}), \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}') \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}') \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

onde $[\phi^S(t, \mathbf{x}), \phi^f(t, \mathbf{x}')] = 0$. Isto se deve ao fato que na função ϕ^S dada por (6.20) não há nenhum operador de campo, o único comutador presente nesta, podendo ser reconhecido como a função de Pauli-Jordan, ou seja, um c -número. Finalmente, para o terceiro comutador,

$$\begin{aligned} \left[\phi^f(\tau), H_F^S(\tau) \right] &= \int d^3 \mathbf{x}' \left[\phi^f(t, \mathbf{x}), \partial_t \phi^f(t, \mathbf{x}') \partial_t \phi^S(t, \mathbf{x}') \right] \\ &+ \int d^3 \mathbf{x}' \left[\phi^f(t, \mathbf{x}), \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}') \nabla \phi^S(t, \mathbf{x}') \right] \\ &= \int d^3 \mathbf{x}' i \partial_t \phi^S(t, \mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &+ \int d^3 \mathbf{x}' \left(\partial_t + \nabla \phi^f(t, \mathbf{x}') \nabla \right) \left[\phi^f(t, \mathbf{x}), \phi^S(t, \mathbf{x}') \right] = i \partial_\tau \phi^S(\tau). \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Substituindo os resultados em (G.11), resulta

$$\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) = -\mu \left\{ \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) \partial_\tau \phi^f(\tau) + R_2^f(\tau) \partial_\tau \phi^S(\tau) \right\}. \quad (\text{G.16})$$

Como foi visto anteriormente, é vantajoso simetrizar os operadores da equação de evolução; assim, simetrizando (G.16),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) &= \frac{\mu}{2} \left(\partial_\tau \phi^f(\tau) \right) \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) + \frac{\mu}{2} \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) \partial_\tau \phi^f(\tau) \\ &+ \frac{\mu}{2} \left\{ \left(\partial_\tau \phi^S(\tau) \right) R_2^f(\tau) + R_2^f(\tau) \partial_\tau \phi^S(\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Separamos novamente a parte livre do campo, responsável pela flutuação do vácuo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right)_{VF} &= \frac{\mu}{2} \left(\partial_\tau \phi^f(\tau) \right) \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) \\ &+ \frac{\mu}{2} \left(R_2^f(\tau) + R_2^S(\tau) \right) \partial_\tau \phi^f(\tau) \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

e a parte de interação, responsável da reação de radiação,

$$\left(\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right)_{RR} = \frac{\mu}{2} \left\{ \left(\partial_\tau \phi^S(\tau) \right) R_2^f(\tau) + R_2^f(\tau) \partial_\tau \phi^S(\tau) \right\}. \quad (\text{G.19})$$

Substituindo $R_2^S(\tau)$ em (G.18) e $\phi^S(\tau)$ em G.19, obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right)_{VF} &= \frac{\mu}{2} \left[\left(\partial_\tau \phi^f(\tau) \right) R_2^f(\tau) + R_2^f(\tau) \partial_\tau \phi^f(\tau) \right] \\ &+ i \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right] \partial_\tau \left[\phi^f(\tau), \phi^f(\tau') \right]_+ \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

e

$$\left(\frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right)_{RR} = i \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left[R_2^f(\tau'), R_2^f(\tau) \right]_+ \partial_\tau \left[\phi^f(\tau'), \phi^f(\tau) \right]. \quad (\text{G.21})$$

Tomando o valor esperado no vácuo $|0\rangle$ do campo e no estado atômico $|a\rangle$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} &= -i \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right] \right| a \right\rangle \times \\ &\partial_\tau \left\langle 0 \left| \left[\phi^f(\tau), \phi^f(\tau') \right]_+ \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} &= -i \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \left\langle a \left| \left[R_2^f(\tau), R_2^f(\tau') \right]_+ \right| a \right\rangle \times \\ &\partial_\tau \left\langle 0 \left| \left[\phi^f(\tau), \phi^f(\tau') \right] \right| 0 \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

onde podemos reconhecer as funções de correlação e susceptibilidade (6.40), (6.41), (6.42) e 6.43, de modo que

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} = 2\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \chi^A(\tau, \tau') \partial_{\tau} C^F(\tau, \tau'), \quad (\text{G.24})$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} = 2\mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' C^A(\tau, \tau') \partial_{\tau} \chi^F(\tau, \tau'). \quad (\text{G.25})$$

Finalmente, substituindo as funções encontradas para C^A e χ^A ,

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} = \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \sin(\omega_0(\tau - \tau')) \partial_{\tau} C^F(\tau, \tau') \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle, \quad (\text{G.26})$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} = \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \partial_{\tau} \chi^F(\tau, \tau'). \quad (\text{G.27})$$

Comparando as equações acima com as expressões para o sistema atômico

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{VF} = \mu^2 \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [\partial_{\tau} \sin(\omega_0(\tau - \tau'))] C^F(\tau, \tau') \left\langle a \left| R_3^f(\tau_0) \right| a \right\rangle, \quad (\text{G.28})$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_A(\tau) \right\rangle_{RR} = \frac{\mu^2}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' [\partial_{\tau} \cos(\omega_0(\tau - \tau'))] \chi^F(\tau, \tau'), \quad (\text{G.29})$$

concluimos que, para que o balanço de energia seja respeitado, é necessário que

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \sin(\omega_0(\tau - \tau')) C^F(\tau, \tau') = 0, \quad (\text{G.30})$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \cos(\omega_0(\tau - \tau')) \chi^F(\tau, \tau') = 0; \quad (\text{G.31})$$

assim, devido a paridade dos integrandos, para qualquer intervalo simétrico o balanço de energia é respeitado. Porém, o caso assintótico, $\tau_0 \rightarrow -\infty$, não é um intervalo simétrico. Calcularemos então explicitamente as funções (G.26) e (G.27). Para o caso inercial encontramos

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^3} + \frac{1}{(u + i\epsilon')^3} \right] \langle a | R_3 | a \rangle, \quad (\text{G.32})$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} = \frac{\mu^2}{8\pi^2 i} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \left[\frac{1}{(u - i\epsilon')^3} - \frac{1}{(u + i\epsilon')^3} \right], \quad (\text{G.33})$$

onde foi substituído C^F (6.59) e χ^F (6.60). Deste modo, realizando as integrais resulta

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} = \frac{\omega_0^2 \mu^2}{8\pi} \langle a | R_3 | a \rangle, \quad (\text{G.34})$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} = \frac{\omega_0^2 \mu^2}{16\pi}, \quad (\text{G.35})$$

as quais são, em módulo, exatamente (6.66) e (6.67). Para o caso acelerado obtemos

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{VF} = \frac{\mu^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty du \sin(\omega_0 u) \times \quad (\text{G.36})$$

$$\left[\frac{1}{(u - i\epsilon 2 + i \frac{2\pi}{\alpha} k)^3} + \frac{1}{(u + i\epsilon 2 + i \frac{2\pi}{\alpha} k)^3} \right] \langle a | R_3 | a \rangle,$$

$$\left\langle \frac{d}{d\tau} H_F(\tau) \right\rangle_{RR} = \frac{\mu^2}{8\pi^2 i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty du \cos(\omega_0 u) \times \quad (\text{G.37})$$

$$\left[\frac{1}{(u - i\epsilon 2 + i \frac{2\pi}{\alpha} k)^3} - \frac{1}{(u + i\epsilon 2 + i \frac{2\pi}{\alpha} k)^3} \right];$$

resolvendo as integrais, encontramos resultados iguais, em módulo, a (6.81) e (6.82). Assim, garante-se que o balanço de energia é respeitado para qualquer intervalo simétrico, e nos casos inercial e acelerado.

APÊNDICE H – Condição de Validade para a Expansão Perturbativa

Na seção 6.2 o operador $\sigma_A(t'')$ foi substituído por $\sigma_A(t)$, o que equivale a expandir (6.109) até segunda ordem. Se aplicado recursivamente, este procedimento irá gerar contribuições para ordens superiores, com termos do tipo triplo comutador, quádruplo comutador, etc. O estudo "formal" da convergência desta série é de extrema dificuldade e complexidade, fugindo totalmente do escopo desta tese. No entanto, apresentaremos argumentos de plausibilidade, os quais indicam que, ao menos, a série deva convergir assintoticamente. Faz-se então, uma avaliação da ordem de magnitude dos próximos termos em comparação com o de segunda ordem. A expressão exata para a população $\Delta\sigma_A(t)$ é

$$\Delta\sigma_A(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [V(t'), [V(t''), \rho(t'')]] . \quad (\text{H.1})$$

Integrando a equação (6.97) entre t e t'' ,

$$\rho(t'') - \rho(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t''} dt''' [V(t'''), \rho(t''')], \quad (\text{H.2})$$

e substituindo em (H.1) surgem naturalmente os termos de segunda e terceira ordem na expansão

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_A(t) &= \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_R [V(t'), [V(t''), \rho(t)]] \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^3 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \int_t^{t''} dt''' Tr_R [V(t'), [V(t''), [V(t'''), \rho(t''')]]]. \end{aligned} \quad (\text{H.3})$$

Devido à forma do potencial, vimos que os traços podem ser fatorados em uma parte referente ao sistema A e outra, $g(\tau)$, ao sistema R . Esta última nos permitirá ignorar os termos de ordem superior. Devemos mostrar que, decorrido um intervalo de tempo Δt suficientemente grande, as correlações de três pontos para os observáveis do *reservoir* são mais fortemente suprimidas que as de dois pontos. Projetando-os na base de R , encontra-se

$$\begin{aligned} g(t', t'') &= Tr [\sigma_R R(t' - t'') R] \\ &= Z_R^{-1} \sum_{m,n} e^{-\beta E_n} \langle n | R^S | m \rangle \langle m | R^S | n \rangle e^{-i\omega_{nm}(t' - t'')}, \end{aligned} \quad (\text{H.4})$$

$$\begin{aligned}
g(t', t'', t''') &= \text{Tr} [\sigma_R R(t' - t'') R R(t''' - t'')] \\
&= Z_R^{-1} \sum_{m,n,l} e^{-\beta E_n} \langle n | R^S | m \rangle \langle m | R^S | l \rangle \langle l | R^S | n \rangle e^{-i\omega_{nm}(t' - t'')} e^{-i\omega_{nl}(t'' - t''')}.
\end{aligned} \tag{H.5}$$

Este é o máximo que podemos avançar sem mais informações sobre o *reservoir*. No entanto, o *reservoir* possui espectro denso de energia, quase contínuo, de modo que assumimos que as diferentes fases em $g(t', t'')$ acarretam interferências destrutivas conforme τ aumente no argumento das exponenciais. Assim, $g(t', t'')$ oscila rapidamente e sua contribuição para a integral (H.3) torna-se cada vez menor. Considerando duas escalas de tempo distintas (COHEN-TANNOUDJI; DUPONT-ROC; GRYNBERG, 1992), T_A e τ_c , tais que

$$T_A \gg \Delta t \gg \tau_c, \tag{H.6}$$

onde τ_c representa o tempo de correlação entre observáveis do *reservoir* e T_A o tempo de evolução daqueles associados ao sistema microscópico, temos, em segunda ordem,

$$\left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(2)} \sim \frac{1}{\Delta t} \frac{v^2}{\hbar^2} \sigma_A \left| \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' e^{-i\omega(t' - t'')} \right|, \tag{H.7}$$

nas vizinhanças de uma determinada frequência característica dominante

$$\omega_{mn} \equiv \omega \sim \tau_c^{-1}. \tag{H.8}$$

Na expressão acima, $v \equiv \langle V(\beta) \rangle$ é o valor típico do potencial de interação no equilíbrio, onde os observáveis do sistema microscópico são tomados em um dado instante, em torno do qual não variam apreciavelmente, dentro dos intervalos de integração. Efetuando as integrais, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' e^{-i\omega(t' - t'')} &= \frac{2}{\omega} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{-i\frac{\omega}{2}(t' - t)} \sin \left[\frac{\omega}{2} (t' - t) \right] \\
&\cong \frac{2}{\omega} e^{-i\omega \frac{\Delta t}{4}} \sin \left[\frac{\omega \Delta t}{4} \right] \Delta t
\end{aligned} \tag{H.9}$$

e, portanto,

$$\left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(2)} \sim 2\tau_c \frac{v^2}{\hbar^2} \sigma_A \sim \frac{\sigma_A}{T_A} \sim \sigma_A \left(\frac{\tau_c}{T_A} \right) \tau_c^{-1}. \tag{H.10}$$

Como $\tau_c \ll T_A$,

$$\frac{v^2}{\hbar^2} \tau_c^2 \ll 1. \quad (\text{H.11})$$

Já em terceira ordem,

$$\left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(3)} \sim \frac{1}{\Delta t} \frac{v^3}{\hbar^3} \sigma_A \left| \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \int_t^{t''} dt''' e^{-i\omega(t'-t''')} \right|; \quad (\text{H.12})$$

porém,

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' \int_t^{t''} dt''' e^{-i\omega(t'-t''')} \\ &= \frac{2}{\omega} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' e^{-i\frac{\omega}{2}(t''-t)} \sin \left[\frac{\omega}{2} (t'' - t) \right] \\ &= \frac{4}{\omega^2} \int_t^{t+\Delta t} dt' \sin^2 \left[\frac{\omega}{4} (t' - t) \right] \simeq \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \left[\frac{\omega \Delta t}{8} \right] \Delta t, \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

de modo que

$$\left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(3)} \sim 4 \frac{v^3}{\hbar^3} \tau_c^2 \sigma_A \sim \left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(2)} 2 \frac{v}{\hbar} \tau_c \ll \left| \frac{\Delta \sigma_A}{\Delta t} \right|^{(2)}. \quad (\text{H.14})$$

Assim, para sistemas fracamente acoplados, a contribuição de termos de ordens superiores é menor do que a de ordens mais baixas; mesmo que a série não convirja uniformemente, trata-se de uma série assintótica e aproximá-la até segunda ordem é suficiente aos nossos propósitos.